现代数学基础丛书 96

脉冲微分系统引论

傅希林　闫宝强　刘衍胜 著



科学出版社
www.sciencep.com

(O-2137.0101)



销售分类建议：高等数学

ISBN 7-03-014673-5
定 价：40.00 元

现代数学基础丛书　96

脉冲微分系统引论

傅希林　闫宝强　刘衍胜　著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书详细阐述脉冲微分系统的理论及最新研究成果，主要包括具有界滞量或无穷延滞的脉冲泛函微分系统的基本理论，脉冲微分系统的几何理论、稳定性理论和边值问题，以及脉冲偏微分系统的振动理论等.

本书可作为理工科大学数学系、应用数学系和其他有关专业的大学生、研究生、教师以及有关的科学工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

脉冲微分系统引论/傅希林，闫宝强，刘衍胜 著. —北京：科学出版社，2005

(现代数学基础丛书；96)

ISBN 7-03-014673-5

Ⅰ.脉… Ⅱ.①傅… ②闫… ③刘… Ⅲ.微分-脉冲系统-研究 Ⅳ.O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 124391 号

责任编辑：吕 虹 祖翠娥／责任校对：朱光光

责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年3月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2005年3月第一次印刷 印张：20

印数：1—2 500 字数：368 000

定价：40.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献．

杨 乐

2003年8月

前 言

脉冲现象作为一种瞬时突变现象，在现代科技各领域的实际问题中是普遍存在的，其数学模型往往可归结为脉冲微分系统. 鉴于这类新型非线性微分系统在现代诸多科技领域日益广泛的应用，逐渐引起微分系统学者专家的关注与重视.

关于脉冲微分系统的专著，最早问世的是 V.Lakshimikantham 等 1989 年出版的专著“Theory of Impulsive Differential Equations”. 这本书对 20 世纪 90 年代以前这类系统早期的基本领域的研究成果进行了系统总结，而自 90 年代以来，脉冲微分系统作为非线性微分系统领域的一个新分支，已取得一批重要研究成果. 但目前国内外尚缺乏对其最新研究成果进行系统论述的专著，本书将补充这方面的不足.

本书从结构体系上按照通常对非线性微分系统研究的核心课题来划分章节，展开论述，并自始至终突出阐述最新研究成果. 譬如，第 2 章几何理论是全新的，而在第 1 章基本理论、第 3 章稳定性理论、第 4 章边值问题及第 5 章振动理论中都突出了近年在“脉冲”与“时滞”共存情况下的最新研究成果. 另外，本书还注意研究方法的总结. 譬如，几何理论中强调了具有脉冲限的积分函数的新方法；又如稳定性理论中分别阐述了变分 V 函数法、部分变元 V 函数法等. 本书内容这样安排希望使更多的读者对非线性脉冲微分系统的理论与研究方法有一个基本的了解，以便尽快掌握该研究领域的概貌. 当然限于我们的水平，本书定会有不当之处，敬请读者指正.

本书撰写过程中得到了李大潜院士的指导，得到了郭柏灵院士和郭大钧教授的支持和鼓励，对他们提出的宝贵意见，我们表示由衷的感谢. 科学出版社科学分社吕虹同志对本书出版付出了辛勤劳动并给予了大力帮助，山东师范大学数学科学学院张立琴教授对本书提出了宝贵意见并做了一定的工作，在此一并表示深切的谢意. 本书的出版获得国家自然科学基金、山东省自然科学基金以及山东师范大学出版基金的资助，均此致谢.

傅希林　闫宝强　刘衍胜

2004 年 8 月

目　录

* * *

绪　论

许多实际问题的发展过程往往有这样的特征：在发展的某些阶段，会出现快速的变化．为方便起见，在这些过程的数学模拟中，常常会忽略这个快速变化的持续期间而假设这个过程是通过瞬时突变来完成的．这种瞬时突变现象通常称之为脉冲现象．脉冲现象在现代科技各领域的实际问题中是普遍存在的，其数学模型往往可归结为脉冲微分系统．脉冲微分系统最突出的特点是能够充分考虑到瞬时突变现象对状态的影响，能够更深刻、更精确地反映事物的变化规律．近年最新科技成果表明，这类系统在航天技术、信息科学、控制系统、通讯、生命科学、医学、经济领域均得到重要应用．譬如，可应用于大型空间航天器的减振装置、卫星轨道的转换技术；可应用于机器人的研制；还可应用于神经网络、混沌控制、机密通讯的研究．下面给出几个具体例子．

例 1[1]　考虑一个力学系统，该系统含有一个通过缓冲器固定于船身的物体．船身的运动轨迹为一条直线，这个物体随着船身的运动而运动，如图 1．

设这个物体和船身的质量分别为 m 和 M，并设有一个外部力 $\sigma(t)$(依赖于时间 t) 作用于船身，缓冲器作用于坚硬物质的力 f 依赖于船身的排水量 x 和相关的速度 $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$．函数 $f(x,\dot{x})$ 的具体形式取决于缓冲器的构造．

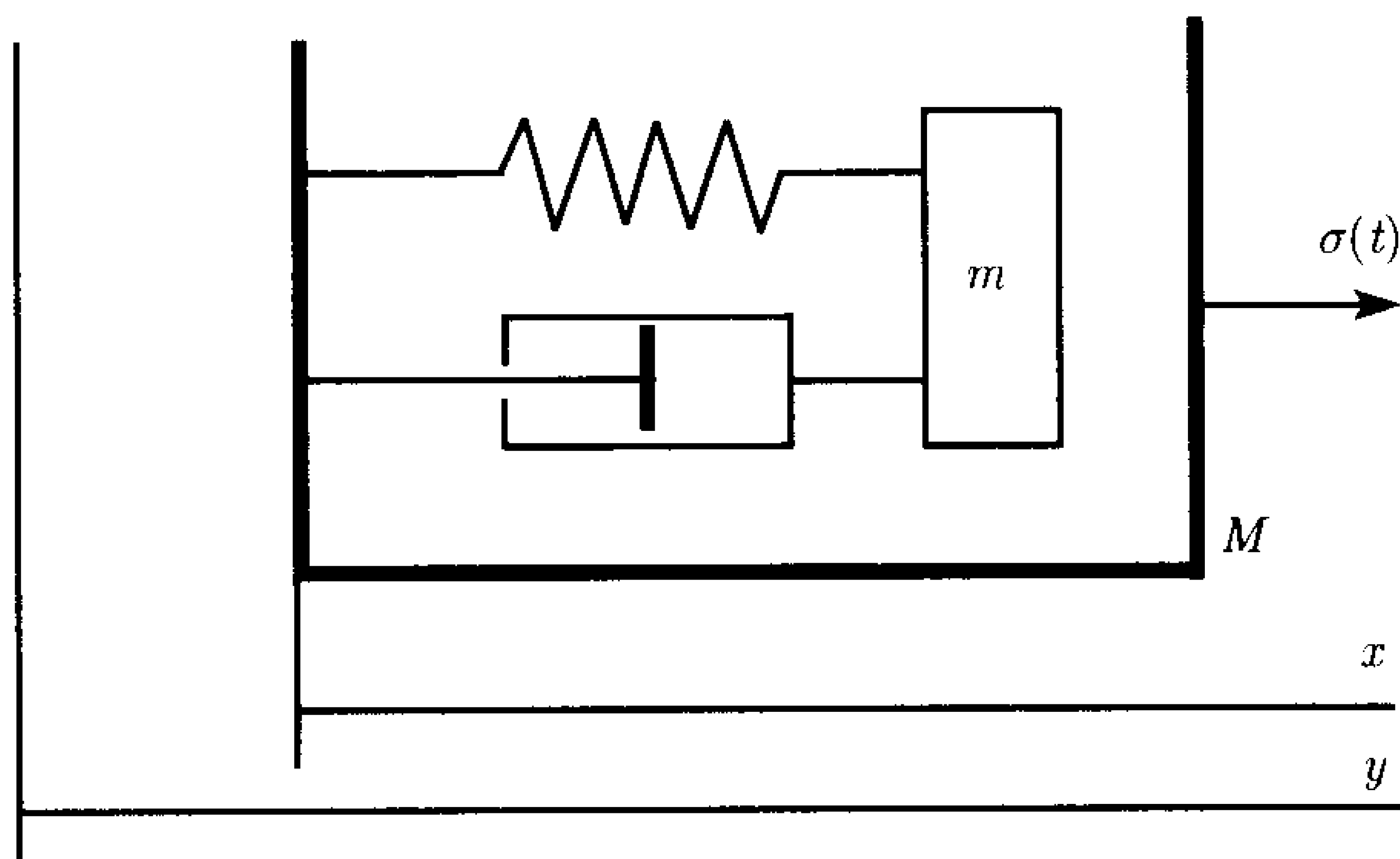


图 1

该系统的运动由下面的微分系统确定：

$$M\ddot{z}+m(\ddot{x}+\ddot{z})=\sigma(t),\qquad m(\ddot{x}+\ddot{z})=f(x,\dot{x}), \tag{1}$$

这里 z 是相对于坐标系统的船身的排水量．

如果系统 (1) 不考虑 $\ddot{z}$，可得描述物体关于船身运动的等式为

$$\ddot{x} - \frac{f(x,\dot{x})}{\mu} = -\frac{\sigma(t)}{M}, \qquad \mu = \frac{M}{M+m}. \tag{2}$$

通常在考虑缓冲系统时，假设船身的加速度 $\ddot{z}$ 已知 (代替力 $\sigma(t)$)，则 (2) 有如下形式:

$$\ddot{x} - \frac{f(x,\dot{x})}{\mu} = -\ddot{z}(t). \tag{3}$$

等式 (2) 和 (3) 可以写成如下形式:

$$\ddot{x} + u(x,\dot{x}) = F(t), \tag{4}$$

这里 $u(x,\dot{x}) = -\dfrac{f(x,\dot{x})}{\mu}$ 称为缓冲器的特征函数. 如果力 $\sigma(t)$(动力学型的外部作用) 已知, 则 $F(t) = -\dfrac{\sigma(t)}{M}$; 如果加速度 $\ddot{z}(t)$(运动学型的外部作用) 已知, 则 $F(t) = -\ddot{z}(t)$.

在固定时刻 τ_k，受振动影响，速度 $\dot{x}$ 的瞬时增加量为

$$\Delta\dot{x} = \dot{x}(\tau_k+0) - \dot{x}(\tau_k) = I_k(x(\tau_k),\dot{x}(\tau_k)). \tag{5}$$

方程 (4) 和 (5) 决定了下面的脉冲微分系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -u(x,y), \qquad t \neq \tau_k, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \Delta x|_{t=\tau_k} = x(\tau_k+0) - x(\tau_k) = 0, \\ \Delta y|_{t=\tau_k} = y(\tau_k+0) - y(\tau_k) = I_k(x(\tau_k),y(\tau_k)). \end{cases} \tag{7}$$

例 2[1]　在一个被外界隔离的环境中，假设物种 A 依赖于食物 B，并且当物种 A 消失时，食物 B 的数量不变，而食物 B 消失时，物种 A 灭绝. 如在渔池中饲养的鱼就属于这种情况.

如果我们用 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别代表物种 A 和食物 B 在时刻 t 的绝对数量或相对数量，那么“物种 – 食物”系统的动态过程可用如下常微分方程组描述:

$$\dot{x} = -\gamma xy, \qquad \dot{y} = -y(\varepsilon - \delta x), \tag{8}$$

这里 $(x,y) \in R_+^2, \gamma > 0, \delta > 0, \varepsilon > 0$ 为常数.

方程组 (1) 是由 Volterra 方程组的极限形式得到的， Volterra 方程描述的是“捕者 – 猎物”系统的动态过程. 这里物种 A 为捕者，食物 B 为增长率为零的猎物.

如果 $x(0)=x_0>0, y(0)=y_0>0$ ，则系统 (1) 的解将停留在 R_+^2 (如图 2) 中，并且

$$\lim_{t\to+\infty} x(t)=x_\infty>0, \qquad \lim_{t\to+\infty} y(t)=0.$$

这意味着如果食物 B 不可再生，那么物种 A 将灭绝．然而，如果适当对“物种－食物”系统施加脉冲作用，则物种 A 的周期性变化也是可能的．

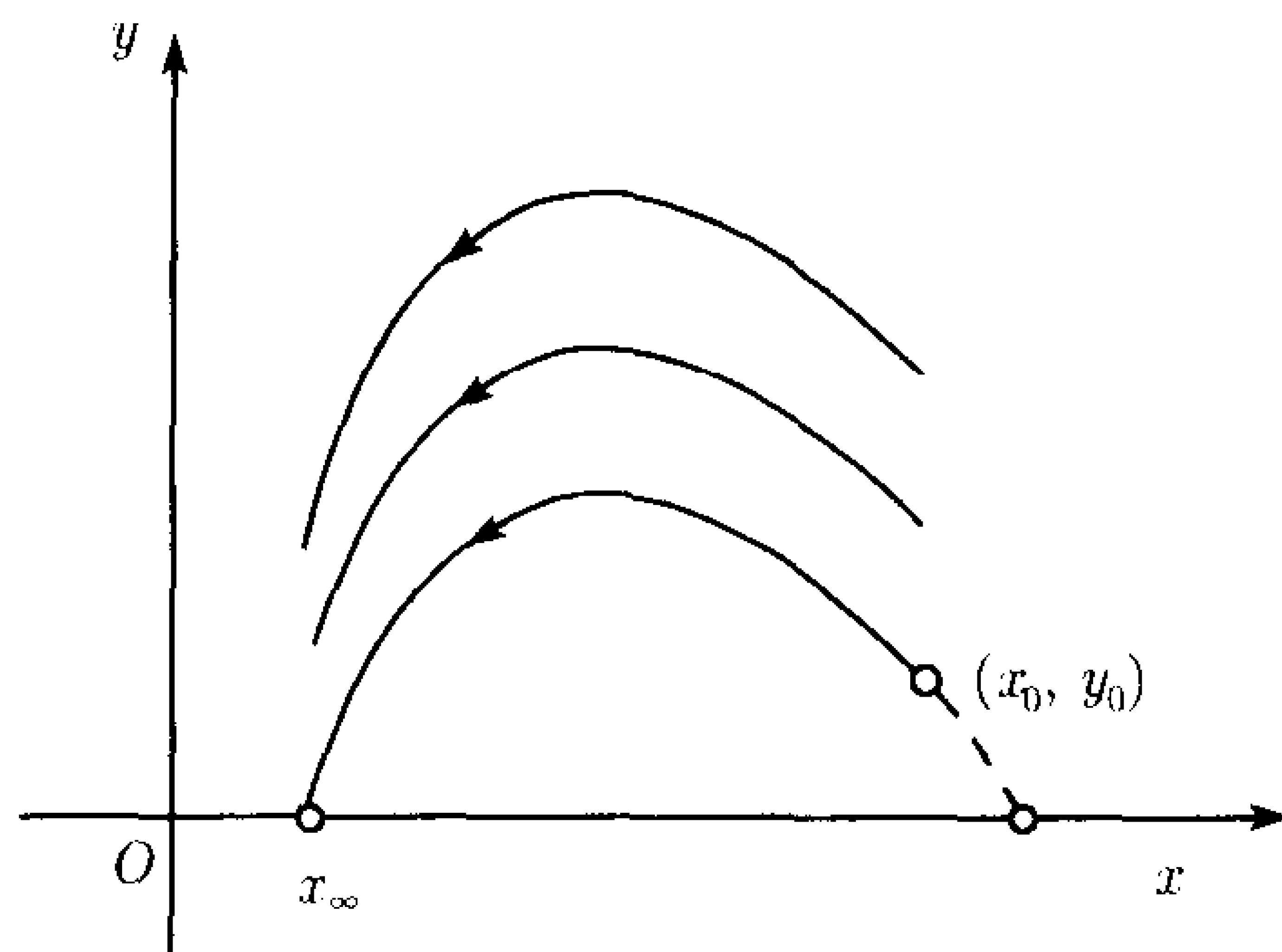


图 2

考虑下面两种情况：

情形 1. 假设在某一时刻，“物种－食物”系统受到脉冲作用，使得食物的总数量增长 $\lambda>0$ ，而种群的数量减少 αy (由于捕杀或自然死亡)．假设 $0<\alpha<1$ ，即通过捕杀，整个物种并没有灭绝．当食物数量达到某个给定水平 $x_1>0$ 时 (即 $x=x_1$ 时)，脉冲作用发生．这样就得到如下含脉冲的微分系统：

$$\begin{cases} \dot{x}=-\gamma xy, \quad \dot{y}=-y(\varepsilon-\delta x), & x\neq x_1, \\ \Delta x=\lambda, \quad \Delta y=-\alpha y, & x=x_1. \end{cases} \tag{9}$$

下面考虑系统 (2) 受到一个 T 周期脉冲作用时 T 周期解的存在性．

设 $x=\xi(t), y=\eta(t)$ 为这样的一个 T 周期解，引进记号 $\xi_0=\xi(0+0), \eta_0=\eta(0+), \xi_1=\xi(T), \eta_1=\eta(T), \xi_1^+=\xi(T+0), \eta_1^+=\eta(T+0)$. 从 T 周期性条件 $\xi_1^+=\xi_0, \eta_1^+=\eta_0$ 得到

$$x_1+\lambda=\xi_0, \qquad (1-\alpha)\eta_1=\eta_0. \tag{10}$$

对 $t\in(0,T]$, 系统 (3) 的解 $x=\xi(t), y=\eta(t)$ 满足关系式

$$e^{\gamma[\eta(t)-\eta_0]}=\left(\frac{\xi(t)}{\xi_0}\right)^{\varepsilon} e^{-\delta[\xi(t)-\xi_0]}. \tag{11}$$

特别地，对 $t=T$, 有 $e^{\gamma(\eta_1-\eta_0)}=\left(\dfrac{x_1}{\xi_0}\right)^{\varepsilon}e^{-\delta(x_1-\xi_0)}$. 根据 (3), 我们得到

$$\eta_0=\frac{1-\alpha}{\alpha\gamma}\left(\varepsilon\ln\frac{x_1}{x_1+\lambda}+\delta\lambda\right). \tag{12}$$

从 (3) 可知 $\eta_0>0$ 的条件是

$$x_1>x=\frac{\lambda e^{-\frac{\delta\lambda}{\varepsilon}}}{1-e^{\frac{\delta\lambda}{\varepsilon}}}. \tag{13}$$

因此，如果条件 (6) 成立，则系统 (2) 在周期脉冲作用下，有唯一一个周期解. 利用 (2) 的第一个方程和关系式 (3), (4), 可得这样的周期为

$$T=\int_0^T dt=\int_{x_1}^{x_1+\lambda}\frac{dx}{[\gamma\eta_0+\varepsilon\ln\frac{x}{x_1+\lambda}-\delta(x-x_1-\lambda)]x}$$

的解 $x=\xi(t), y=\eta(t)$ 的轨迹图像，如图 3.

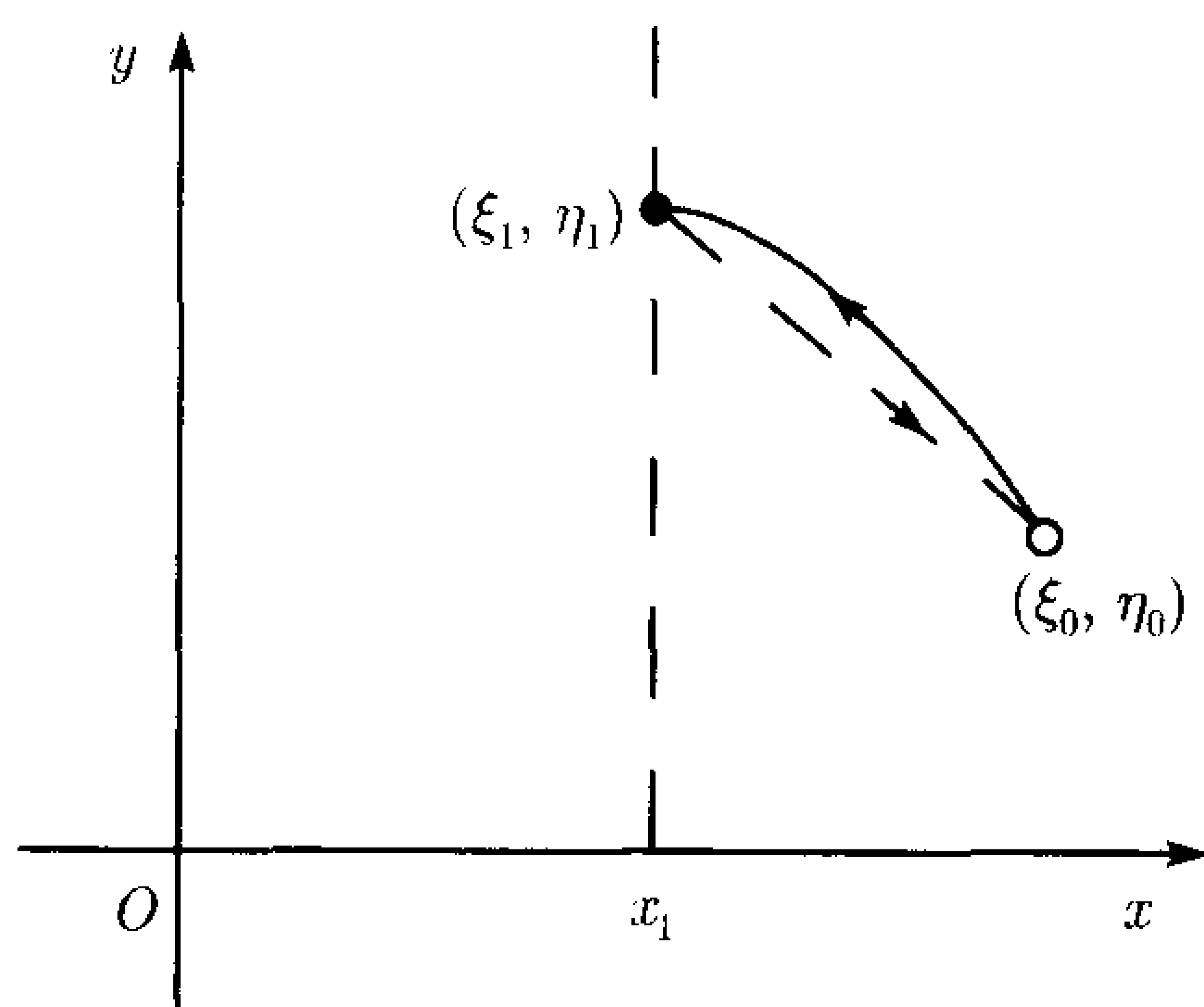


图 3

情形 2. 假设“物种－食物”系统当食物的数量 x_1 满足条件 (6) 时受脉冲作用. 设 $n>0$ 为某个整数，在每一次脉冲作用时，食物的数量增加 λ, 而种群的数量只有在脉冲时刻 τ_k 才突然减少 (这里 k 为 n 的倍数), 即

$$\Delta x(\tau_k)=\lambda, \tag{14}$$

$$\Delta y(\tau_k)=\begin{cases}0, & k\text{不为}n\text{的倍数},\\ -\alpha y(\tau_k), & k\text{为}n\text{的倍数}.\end{cases} \tag{15}$$

下面考虑当初始条件 $x(0+)=x_0>0, y(0+)=y_0>0$ 达到何值时，脉冲系统 (1), (7), (8) 有一个 $T=\tau_n$ 的周期解.

设 $x_k = x(\tau_k), x_k^+ = x(\tau_k + 0), y_k = y(\tau_k), y_k^+ = y(\tau_k + 0), \tau_0 = 0$. 由 (7), (8) 和 T 周期性条件 $x_n^+ = x_0, y_n^+ = y_0$ 可得

$$x_1 + \lambda = x_0, \qquad (1-\alpha)y_n = y_0. \tag{16}$$

利用 (4) 可推得 $e^{\gamma(y_k - y_{k-1}^+)} = \left(\dfrac{x_k}{x_{k-1}^+}\right)^{\varepsilon} e^{-\delta(x_k - x_{k-1}^+)}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$. 再根据 (7), (8), (9) 可推知

$$y_k - y_{k-1} = \frac{1}{\gamma}\left(\varepsilon \ln \frac{x_1}{x_1 + \lambda} + \delta\lambda\right) \equiv \mu, \qquad k = 1, 2, \cdots, n,$$

$$y_k = y_0 + k\mu, \qquad k = 1, 2, \cdots, n,$$

$$y_0 = \frac{(1-\alpha)n\mu}{\alpha}.$$

从 (6) 可推得 y_0 为正. 因此系统 (1), (7), (8) 的满足初始条件 $\xi(0+) = x_0, \eta(0+) = y_0$ 的解 $x = \xi(t), y = \eta(t)$ 有唯一非平凡的 T 周期解. 选取种群数量的一个平均值 $\eta^* = \dfrac{1}{2}(y_{n-1} + y_n) = \mu\left(\dfrac{n}{\alpha} - \dfrac{1}{2}\right)$, 则 $x = \xi(t), y = \eta(t)$ 为下述脉冲自治系统的 τ_n 周期解:

$$\dot{x} = -\gamma x y, \quad \dot{y} = -y(\varepsilon + \delta x), \qquad x \neq x_1,$$

$$\Delta x = \lambda, \qquad \Delta y = \begin{cases} 0, & y < \eta^*, \quad x = x_1, \\ -\alpha y, & y \geqslant \eta^*, \quad x = x_1. \end{cases}$$

该解的图像如图 4.

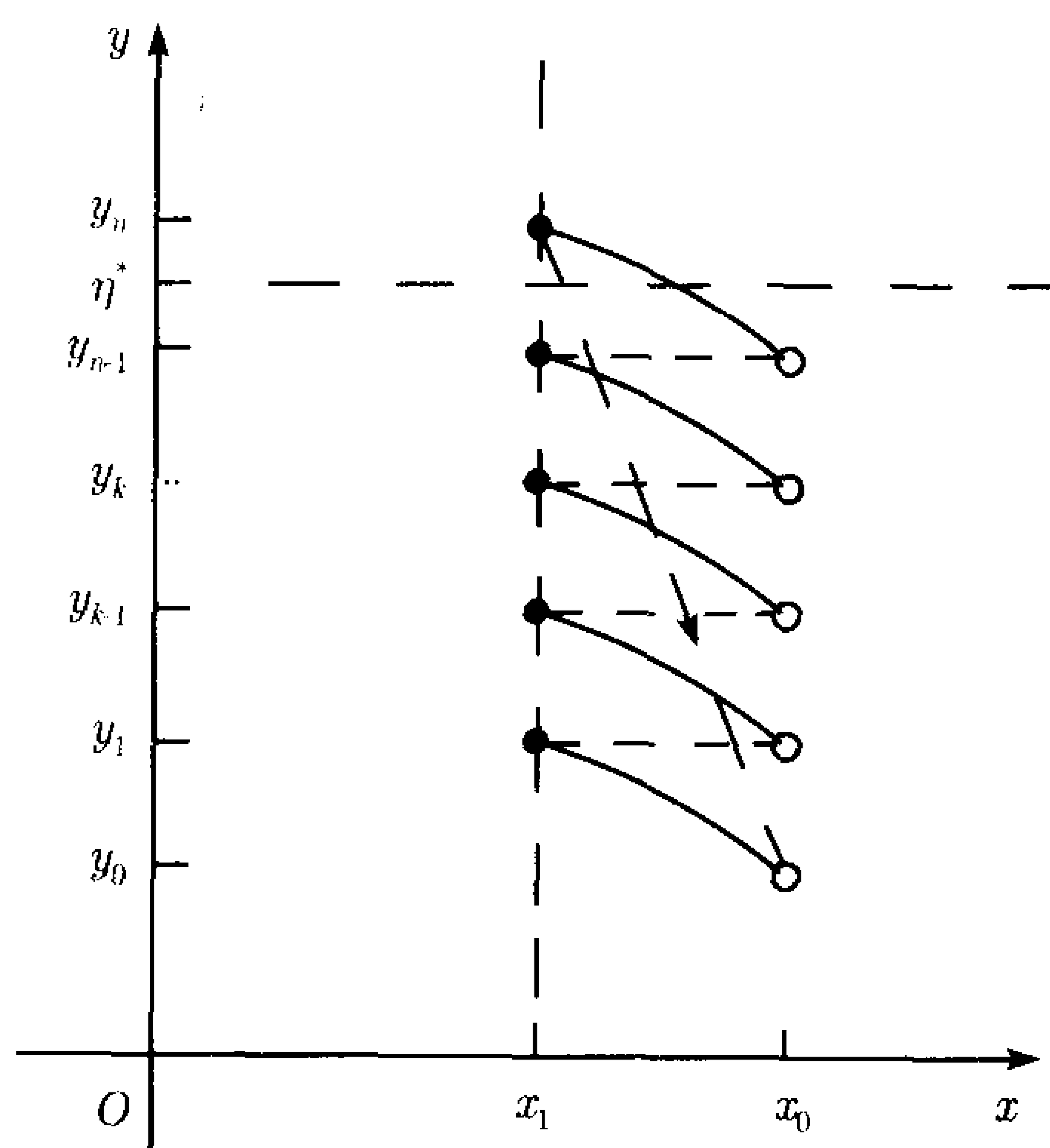


图 4

例 3[2]　脉冲控制问题. 该问题起源于飞船行驶, 生态控制等问题的研究. 控制的目的就是干涉它的运动过程来达到预期结果. 控制一般分为连续控制和脉冲控制. 脉冲控制最大的优势是易于操作, 并且实用经济, 如在火箭运行控制中, 其运行轨道的脉冲校正装置要比飞行过程中的监视 (correct on-line) 和正确行驶的装置简单得多和经济得多.

假设一个物理现象可用如下微分系统来描述:

$$x' = A(t)x, \tag{17}$$

这里 $x \in R^n, A \in C[R, R^n]$, 且满足如下边界条件:

$$x(t_0) = x_0, \qquad x(t_f) = x_f. \tag{18}$$

众所周知, 一般情况下 (17), (18) 的解是不存在的, 但如果在 (17) 的右端增加一个可控制项, 类似于连续控制, 这样就可解了. 因此脉冲控制的思想就是对任意一个满足初始条件的系统在规定时刻通过应用该物理系统的一对组合部件的脉冲来达到规定的状态.

设 x 可以分成两部分 $x^T = (z^T, y^T)$, 这里 $z \in R^{n-m}$, $y \in R^m$. 向量 y 代表系统的脉冲作用分量, 即只在系统的后 m 维向量中出现脉冲. 为避免平凡解, 通常假设 $1 \leqslant m < n$. 称系统 (17) 是脉冲可控制的. 如果对任意给定的 (t_0, τ_0),$(t_f, x_f) \in R \times R^m$,$t_0 < t_f$, 存在 $t_i \in (t_0, t_f)$,$i = 1, 2, \cdots, r$,$t_1 < t_2 < \cdots < t_r$, 并且 $\Delta y_i \in R^m$, $i = 1, 2, \cdots, r$, 使得如下脉冲微分系统

$$\begin{cases} x' = A(t)x, & t \neq t_i, \\ x(t_i^+) = x(t_i^-) + \Delta x(t_i), & i = 1, 2, \cdots, r, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{19}$$

在 $[t_0, t_f]$ 上有一个解 $x(t)$ 满足 $x(t_f) = x_f$, 其中 $\Delta x(t_i)^T = (0, \Delta y_i^T)$.

设 $\Phi(t)$ 为系统 (17) 的基解矩阵, 则系统 (19) 在 $[t_0, t_f]$ 上的唯一解可由如下表示式给出:

$$x(t) = \begin{cases} \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0, & t \in [t_0, t_1], \\ \Phi(t)\Phi^{-1}(t_i)x(t_i^+), & t \in (t_i, t_{i+1}],\ i = 1, 2, \cdots, r-1, \\ \Phi(t)\Phi^{-1}(t_r)x(t_r^+), & t \in [t_r, t_f], \end{cases} \tag{20}$$

则由 (19) 知系统 (17) 是脉冲可控的当且仅当

$$\sum_{i=1}^{r} \Phi_m^{-1}(t_i)\Delta y_i = b, \tag{21}$$

这里 $\Phi_m^{-1}(t)$ 代表的最右边 m 列， $b = \Phi^{-1}(t_f)x_f - \Phi^{-1}(t_0)x_0$.

设 $W = [\Phi_m^{-1}(t_1), \Phi_m^{-1}(t_2), \cdots, \Phi_m^{-1}(t_r)]$, $Y^T = (\Delta y_1^T, \Delta y_2^T, \cdots, \Delta y_r^T)$, 则 (21) 可以改写成如下形式:

$$WY = b. \tag{22}$$

由于 x_0, x_f 任意，因此 b 也任意. 根据线性代数知识系统 (17) 是脉冲可控的当且仅当

$$\text{Rank}(W) = n. \tag{23}$$

这样，方程 (23) 建立了系统 (17) 脉冲可控的一个充分必要条件.

例 4[3] 考虑具有脉冲的洛伦茨 (Lorenz) 系统:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -xz - y + \gamma x, \qquad t \neq 0.5k, k = 0, 1, 2, \cdots, \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - bz, \\ \Delta x = I_k^1(x) = m_1 u_k + \varepsilon_1 x_k - x_k, \qquad t = 0.5k, k = 0, 1, 2, \cdots, \\ \Delta y = I_k^2(y) = m_2 u_k + \varepsilon_2 y_k - y_k, \qquad t = 0.5k, k = 0, 1, 2, \cdots, \\ \Delta z = I_k^3(z) = m_3 u_k + \varepsilon_3 z_k - z_k, \qquad t = 0.5k, k = 0, 1, 2, \cdots, \\ u_{k+1} = g(u_k) = \lambda u_k(1 - u_k), \qquad u_0 = 0.5. \end{cases} \tag{24}$$

图 5~ 图 8 分别给出了洛伦茨吸引子及在不同脉冲输入下相平面中的轨线.

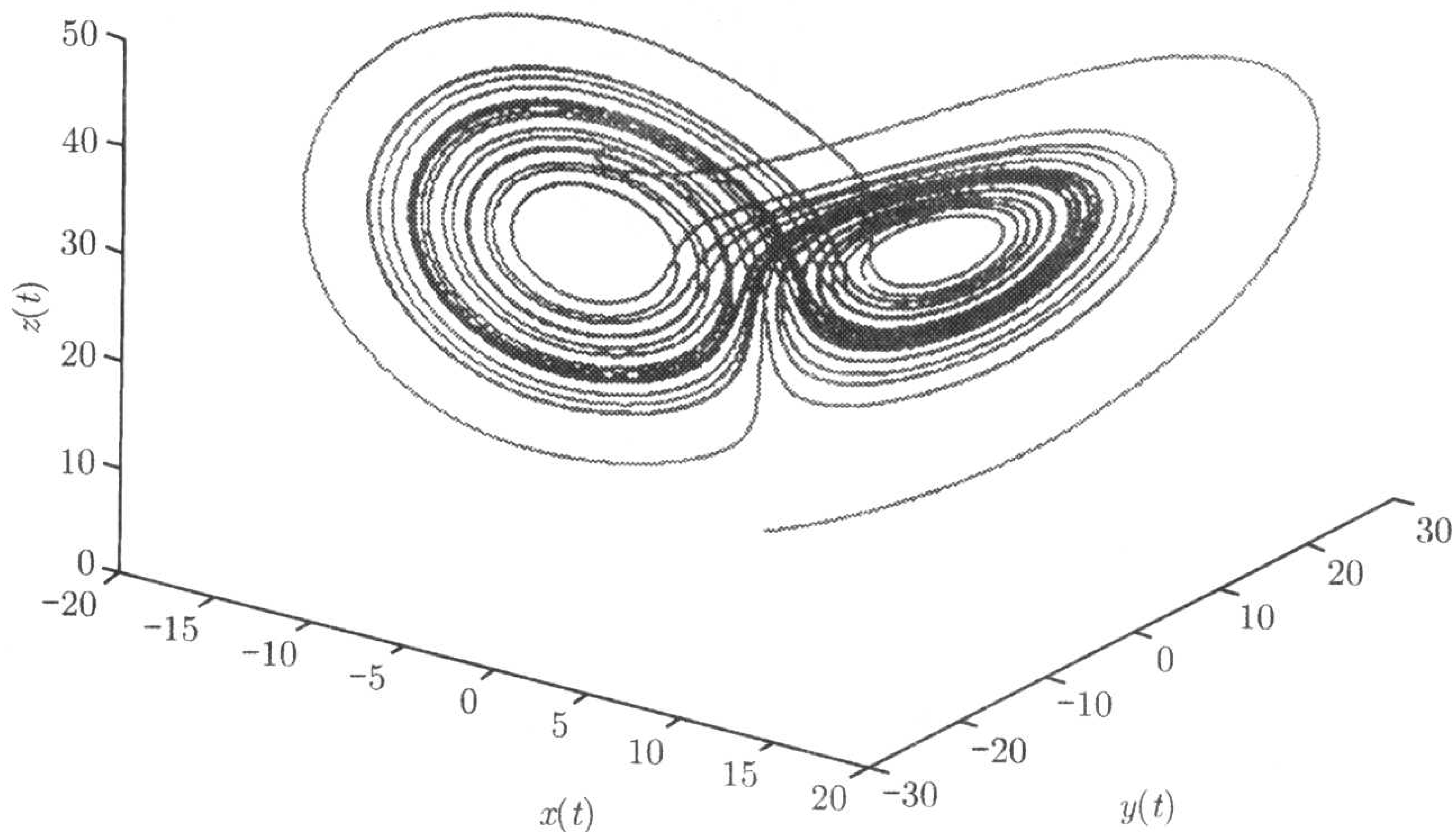


图 5 洛伦茨吸引子: $\sigma = 10, \gamma = 28, b = \dfrac{3}{8}$

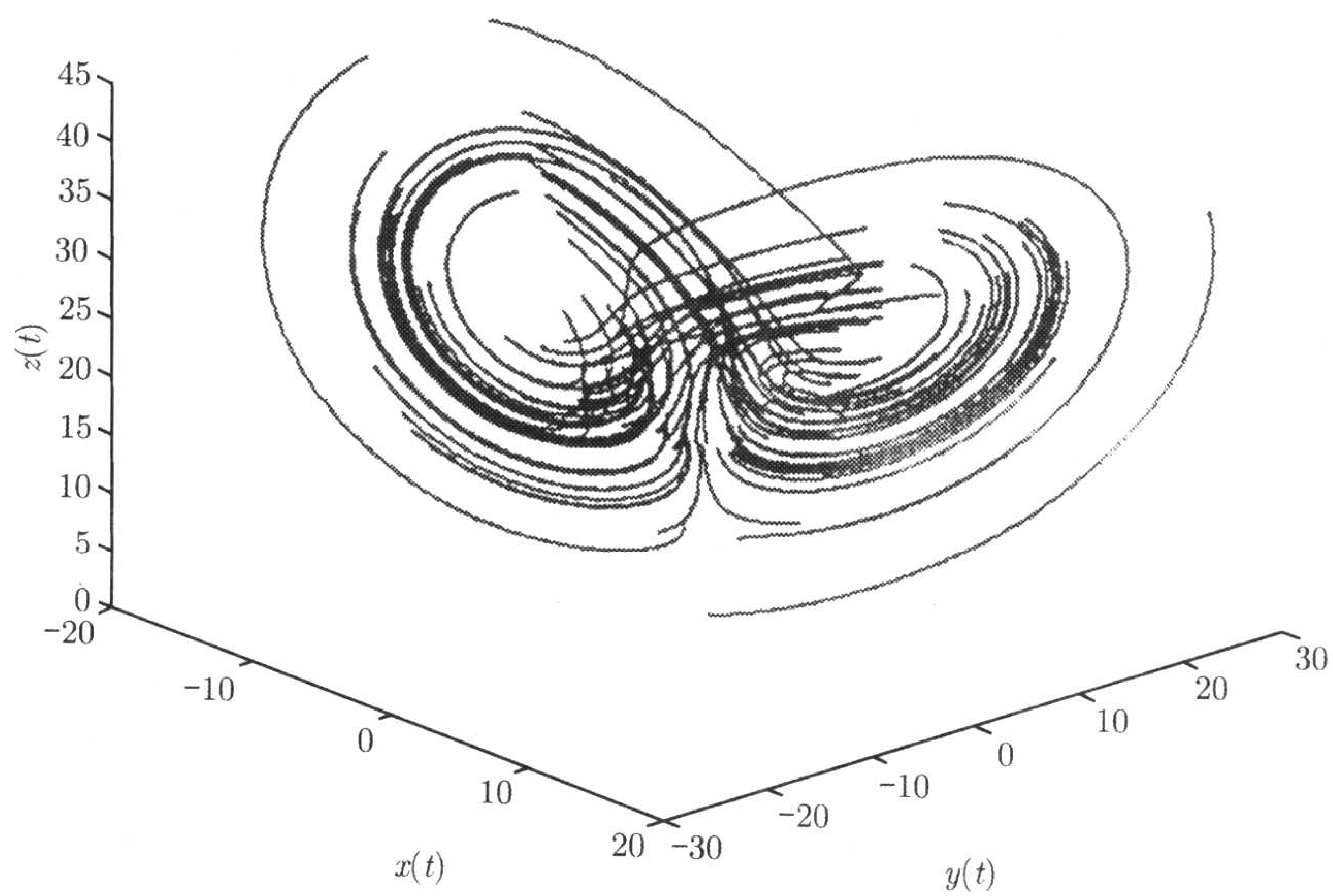


图 6 混沌吸引子： $m_1 = m_3 = -0.5, m_2 = 0.5, \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1, \varepsilon_2 = -0.05$

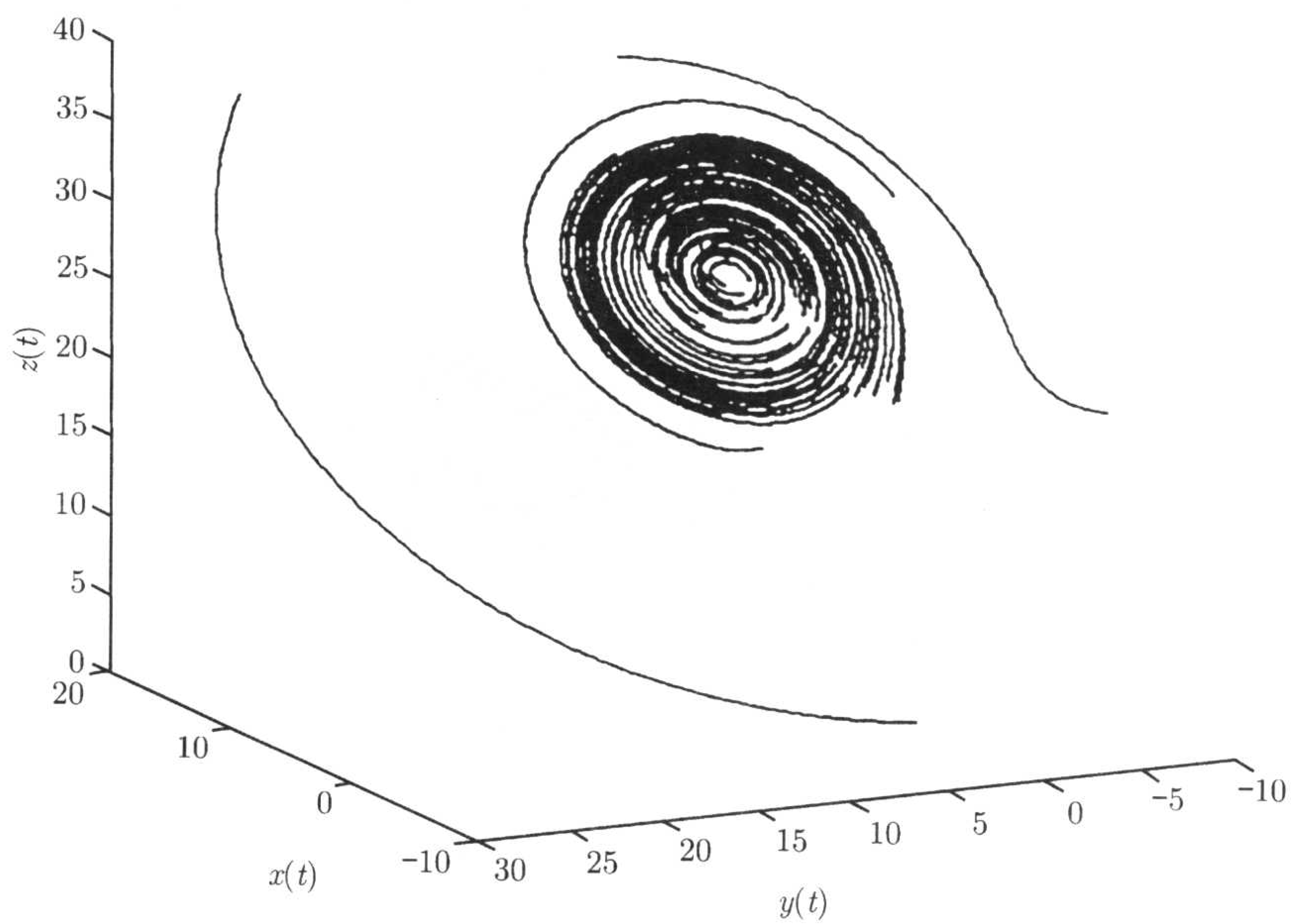


图 7 混沌吸引子： $m_1 = m_3 = 0.5, m_2 = 12, \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1, \varepsilon_2 = -0.05$

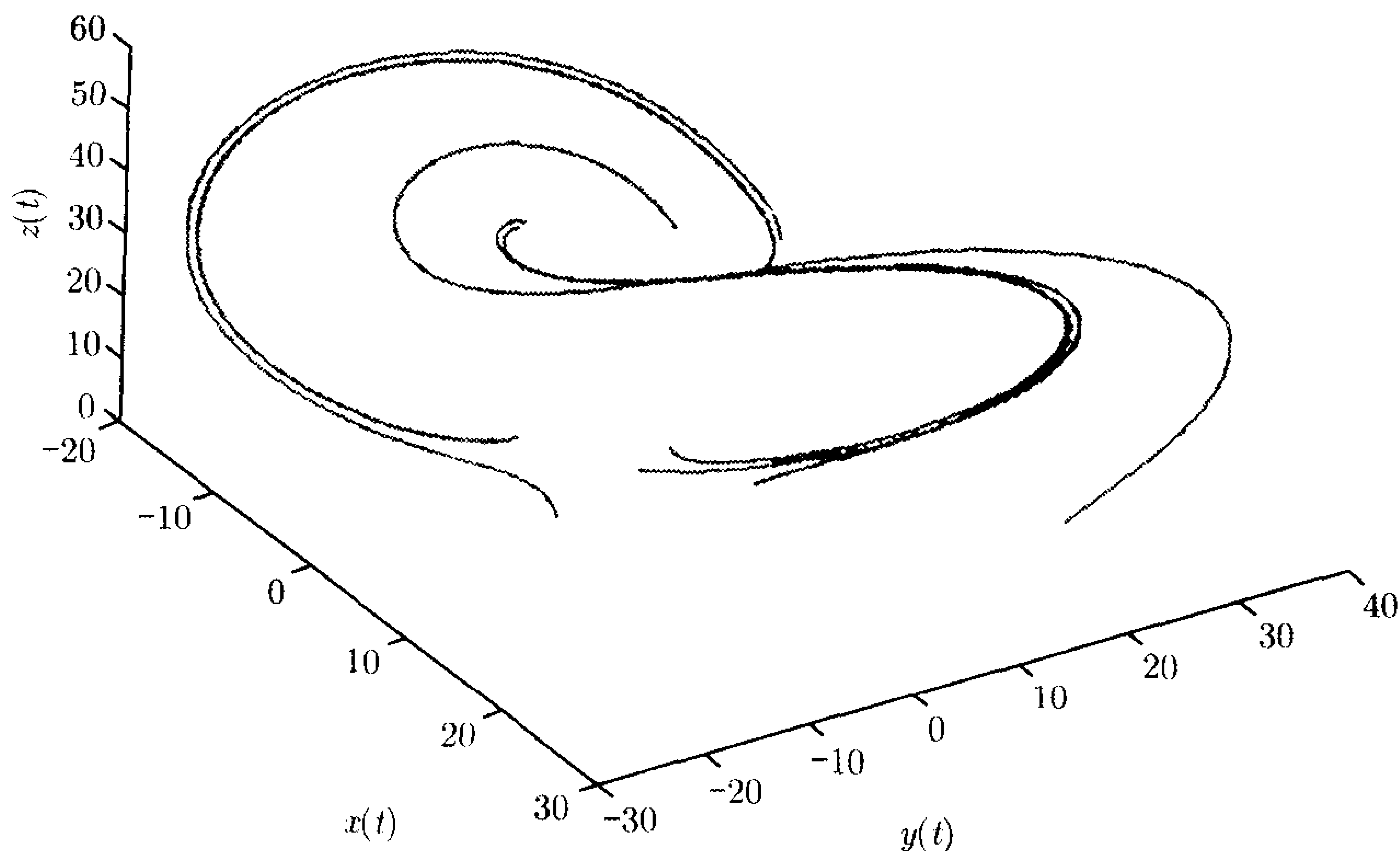


图 8 近似周期的轨道: $m_1 = m_2 = 0, m_3 = 0.05, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = 0.05$

注意脉冲参数选择不同时，洛伦茨吸引子的轨道发生了变化，出现了单圈的吸引子，甚至是近似于周期的轨道 (这是在 m_i, ε_i 均是充分小的时候产生的). 所以脉冲的输入，不仅能使得原来的规则的系统，出现复杂的现象，也能使得完全混乱的吸引子，出现一定的规律.

例 5[3] 整合 - 激发电路模型.

对于单个的动态神经元，根据电流守恒定律，我们可以考虑如下系统:

$$\dot{\phi}(t) = f[\phi(t)] + A_1(t)\delta[\phi(t) - \theta] + A_2(t)\delta(t - T), \tag{25}$$

其中 $\phi(t)$ 表示单个神经元的膜电位，或称作为神经元的内部状态; 连续函数 $f(\cdot)$ 表示取决于神经元本身内部机制的膜上的电流函数; $\delta(\cdot)$ 表示 δ 函数，常数 θ 表示神经元激发释放冲动的电势阈值; T 表示外部输入强制神经元激发释放冲动的时刻; 系数 $A_i(i = 1, 2)$ 表示相应的电势强度. 因为考虑的是单个神经元，自然所涉及的其他神经元的电流输入就不予考虑了.

如果我们假设神经元膜电势 $\phi(t)$ 在 $t = T$ 的时刻并没有达到阈值，并且注意到如下的事实:

$$\int_{t_0}^{\hat{t}} A_2(t)\delta(t - T)dt = A_2(\hat{t})\varepsilon(\hat{t} - T),$$

其中分布函数

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

那么对系统 (25) 两边分别从时刻 t_0 到 $(T+0)$ 和 t_0 到 $(T-0)$ 积分，得

$$\phi(T+0)-\phi(T-0)=A_2(T+0).$$

类似地，通过积分计算可以处理阈值 θ，并得到与上式相类似的结果. 于是得到描述单个神经元的膜电势动力学行为的脉冲微分系统:

$$\begin{cases}\dot{\phi}(t)=f[\phi(t)], & \text{当}\phi(t)\neq\theta\text{且}t\neq T\text{时},\\ \Delta I_1=\phi(t+0)-\phi(t)=A_1(t+0), & \text{当}\phi(t)=\theta\text{时},\\ \Delta I_2=\phi(t+0)-\phi(t)=A_2(t+0), & \text{当}t=T\text{时}.\end{cases}\tag{26}$$

单个整合-激发电路模型的电路示意图由图 9 给出.

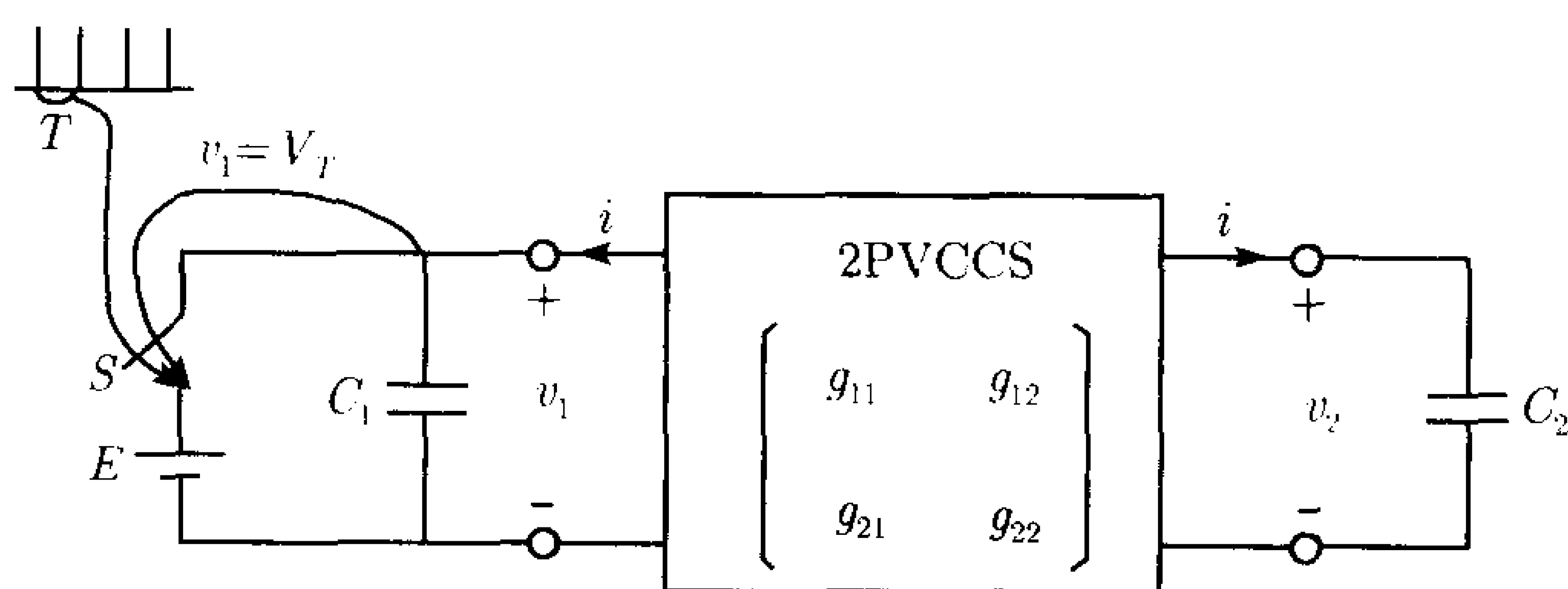


图 9　整合-激发电路模型的电路示意图

从图 9 可以看到，两个出口的电势控制电源 (2PVCCS) 和两个电容 C_1, C_2 构成了一个振荡电路. 电键 S 闭合表示或者是神经元自身释放脉冲，或者是神经元收到来自外来的刺激后释放脉冲；亦即或者是电容电势 v_1 达到了阈值电势 V_T 后使得电键 S 闭合，或者是外在周期的脉冲输入使得电键 S 闭合. 无论是自身达到阈值还是受到刺激后释放脉冲，当在电键 S 被闭合的瞬时，左边电路两端 (电容 C_2) 的电势 v_1 被重新置为基准电势 E，而右边电路两端 (电容 C_2) 的电势 v_2 保持不变. 这样我们就可以给出如下的二维脉冲微分方程组以描述整合-激发电路模型:

$$\begin{cases}\dfrac{dv_1}{dt}=\dfrac{g_{11}}{C_1}v_1+\dfrac{g_{12}}{C_1}v_2, & \text{当 } v_1<V_T\text{且}t\neq nr\text{时},\\ \dfrac{dv_2}{dt}=\dfrac{g_{21}}{C_2}v_1+\dfrac{g_{22}}{C_2}v_2, & n=1,2,3,\cdots,\\ \Delta v_1=E-v_1(t),\Delta v_2=0, & \text{当 } v_1(t)=V_T\text{或}t=nr\text{时},\end{cases}\tag{27}$$

其中常数 $r>0$ 表示是外界刺激的输入周期. 另外，我们还可以分别定义电路释放脉冲的序列: $v_0(t)$—— 由达到阈值释放的脉冲电势 (输入脉冲序列)，$u(t)$—— 由外界周期输入导致释放的脉冲信号 (输入脉冲序列). 它们可以表示如下:

$$v_0(t)=\begin{cases}V_H, & \text{当 } v_1=V_T\text{时},\\ V_L, & \text{当 } v_1<V_T\text{时}.\end{cases}$$

$$u(t)=\begin{cases}1, & \text{当 } t=nr, n=1,2,3,\cdots,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

记 P 为方程 (11) 的系数矩阵,并且,假设矩阵 P 具有一对复特征值,记为 $\delta\omega\pm\sqrt{-1}\omega$,其中

$$\omega=\sqrt{-\frac{g_{12}g_{21}}{C_1C_2}-\frac{1}{4}\left(\frac{g_{11}}{C_1}-\frac{g_{22}}{C_2}\right)^2}>0,$$

$$\delta=\frac{1}{2\omega}\left(\frac{g_{11}}{C_1}+\frac{g_{22}}{C_2}\right)>0.$$

作如下变量代换:

$$\tau=\omega t,\qquad d=\omega r,\qquad p=\frac{1}{2\omega}\left(\frac{g_{11}}{C_1}-\frac{g_{22}}{C_2}\right),\qquad q=\frac{E}{V_T},$$

$$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{V_T}v_1,\\ y=\dfrac{p}{V_T}v_1+\dfrac{g_{12}}{\omega C_1V_T}v_2,\\ z=\dfrac{v_0-V_L}{V_H-V_L}.\end{cases}$$

于是脉冲微分系统 (26) 及相应生成的脉冲序列可以表示成如下形式:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{d\tau}=\delta x+y, & x(\tau)<1,\\ \dfrac{dy}{d\tau}=-x+\delta y, & \text{并且 } u(\tau)=0\text{时},\\ x(\tau+0)=q, & \text{当 } x(\tau)=1,\\ y(\tau+0)=y(\tau)-p[x(\tau)-q], & \text{或者 } u(\tau)=1\text{时}.\end{cases}\tag{28}$$

$$z(\tau)=\begin{cases}1, & \text{当 } x(\tau)=1\text{时},\\ 0, & \text{当 } x(\tau)<1\text{时}.\end{cases}$$

$$u(\tau)=\begin{cases}1, & \text{当 } t=nd, n=1,2,3,\cdots,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

这里的 $z(\tau)$ 与 $u(\tau)$ 分别表示归一化以后的输出与输入脉冲序列. 经计算可得脉冲微分系统 (27) 满足 $x(\tau)<1$ 且 $u(\tau)=0$ 的解的表达式为

$$\begin{cases}x(\tau)=e^{\delta\tau}(x(0)\cos\tau+y(0)\sin\tau),\\ y(\tau)=e^{\delta\tau}(-x(0)\sin\tau+y(0)\cos\tau),\end{cases}$$

其中 $(x(0), y(0))$ 表示在 $\tau = 0$ 时的初值，那么根据上述解的表达式，我们在图 10 中绘出了相应的积分曲线和输出、输入脉冲序列.

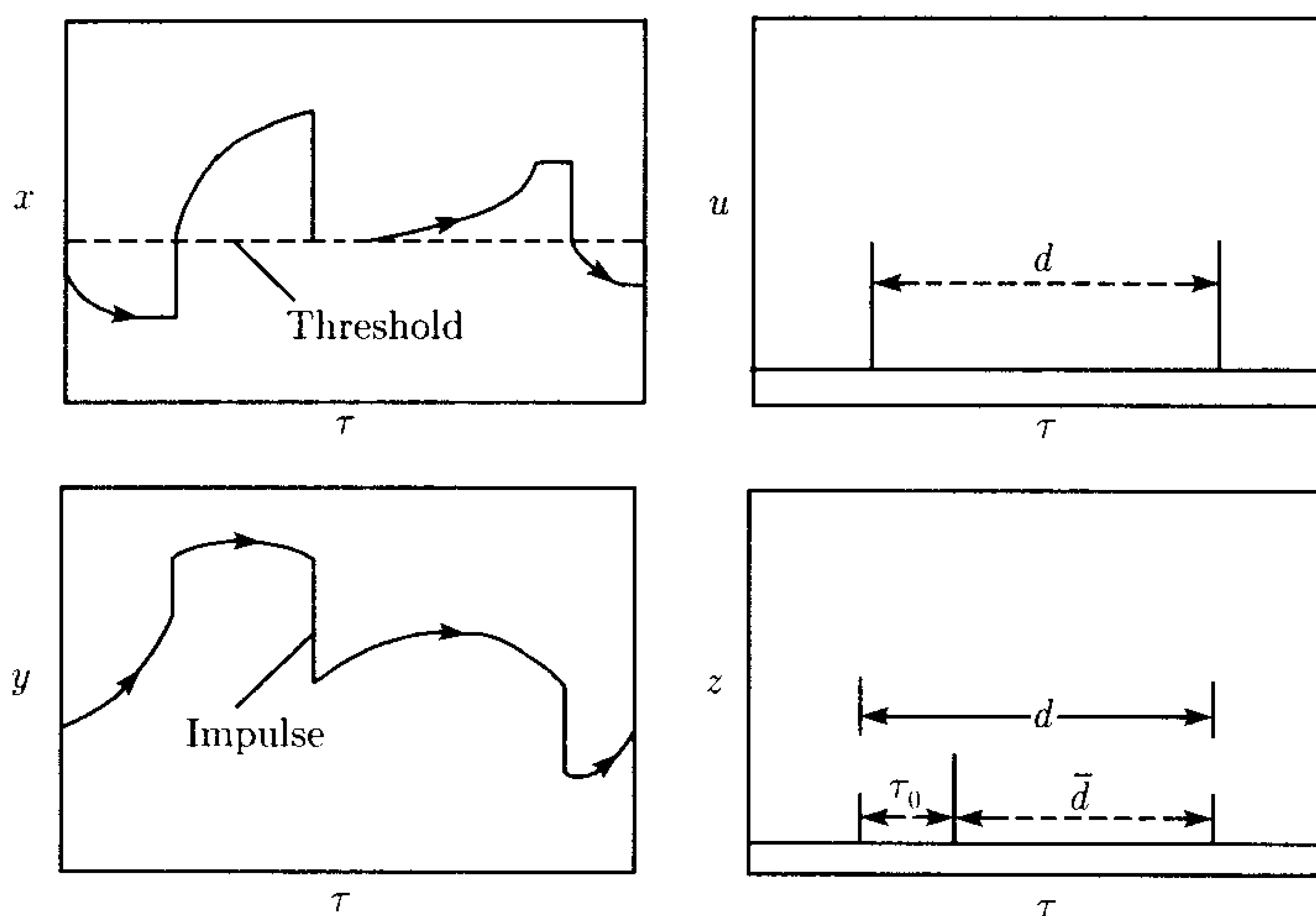


图 10 整合 - 激发电路模型的积分曲线与输出、输入脉冲序列

例 6[4] 动态神经元的网络模型.

从信息处理的角度来看，大体上可以把生物神经元分成三个区域：树突区、始段和轴突.

这样所谓的树突区包括中间神经元和运动神经元的树突和胞体上所覆盖有突触的区域，也包括感觉神经元接受外界刺激的区域. 但上述两类区域在性质上有所不同.

对于中间神经元和运动神经元来说，其输入是脉冲式的. 当突触前末梢有神经冲动穿来时，就会向突触间隙释放一定量的传递，而在突触后膜产生随时间作指数衰减的兴奋性突触后电位. 从突触前末梢传来神经冲动，再到突触后膜开始产生电位变化，其间有一段为时约 0.5~1.0ms 的突触延搁. 考虑到膜有膜电容和膜电阻，并考虑到突触后电位的指数形式，可以用下列一阶微分系统描述：

$$x'_{ij}(t) + \frac{1}{T_{ij}} x_{ij}(t) = A_{ij} z_j(t - \tau_{ij}), \qquad i, j = 1, 2, \cdots, N, \tag{29}$$

其中 $x_{ij}(t)$ 是第 i 个神经元和第 j 个神经元的末梢所形成的突触后电位. $z_j(t)$ 为第 j 个神经元的输出，这是一脉冲序列. A_{ij} 为作用系数，τ_{ij} 代表突触延搁，T_{ij} 为时间常数.

对于感觉神经元来说，其不同之处是在于它的输入不是神经脉冲，而是外界刺

激，相应的微分系统为

$$x_{i0}'(t)+\frac{1}{T_{i0}}x_{i0}(t)=A_{i0}I_i(t),\qquad i=1,2,\cdots,N, \tag{30}$$

其中 $x_{i0}(t)$ 为感受器电位，$I_i(t)$ 为外界刺激，A_{i0} 为传递系数，T_{i0} 为时间常数.

由于神经元的胞体和树突几乎全部为突触前末梢所覆盖，只有始段裸露在外，此处的电阻最小，因此由突触后电位所引起的局部电流都要流经始段而在此处总和起来. 不同的突触离始段的距离各不相同，所在膜的电学性质也不全相同，因此在总和时都要乘上某一权重. 当此总和电位达到某一阈值时就会发出一个神经冲动沿轴突向下传导，而始段处的分级电位将下降到静息电位稍下，然后再重新总和直至再次达到阈值. 当然始段处的膜也具有膜电容和膜电阻，因此始段处的分级电位的动态过程当遵循下列微分系统：

$$y_i'(t)+\frac{1}{T_i}y_i(t)=\sum_{j=0}^{N}w_{ij}x_{ij}(t)-\Theta_i z_i(t),\qquad i=1,2,\cdots,N, \tag{31}$$

其中 $y_i(t)$ 为第 i 个神经元的分级电位，w_{ij} 为权重系数，$-\Theta_i z_i(t)$ 为由于当神经元发放神经脉冲时所引起的始段分级电位复极化：

$$z_i(t)=\delta(y_i(t)-\theta), \tag{32}$$

其中 $\delta(t)$ 为脉冲函数，θ 为阈值，$\Theta\geqslant\theta$.

假设第 i 个神经元在时刻 $t_{ik}(k=1,2,\cdots,n_i)$ 有发放，经计算可知

$$\Delta x_{ij}(t)|_{t=t_{ij}}=A_{ij},\qquad i=1,2,\cdots,N,$$

$$\Delta y_i(t)|_{t=t_{i,1+1}}=-\Theta_i,\qquad i=1,2,\cdots,N.$$

显然该系统是如下脉冲泛函微分系统 (37) 的特殊形式.

鉴于这类新型非线性微分系统作为数学模型日臻显现出其在诸多科技领域中深刻的实际意义及应用价值，迫切需要从理论上对这类系统的解的基本规律与特征进行探索，特别需要从理论上揭示脉冲引起系统的解的哪些质的变化. 为此，首先我们给出带脉冲的微分系统的一般定义.

定义 1(脉冲微分系统)

(i) 考虑微分系统

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x), \tag{33}$$

这里 $f:R^+\times\Omega\to R^n$, $\Omega\subseteq R^n$ 是开集，R^n 是 n 维空间，$R^+=[0,+\infty)$ 和

(ii) 集合 $M(t), N(t)\subseteq\Omega$, $\forall t\in R^+$, 及

(iii) 算子 $A(t): M(t) \to N(t), \forall t \in R^+$.

设 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 是系统 (33) 在满足 $x(t_0) = x_0$ 的解，它具有下列特点：点 $P_t = (t, x(t))$ 开始于 (t_0, x_0), 沿弧线 $\{(t, x) : t \geqslant t > t_0, x = x(t)\}$ 运动一直到点 $t_1 > t_0$, 在 t_1 处 P_t 碰到集合 $M(t)$. 在 $t = t_1$ 处，$A(t)$ 将 $P_{t_1} = (t_1, x(t_1))$ 变成 $P_{t_1^+} = (t_1, x_1^+) \in N(t_1)$, 这里 $x_1^+ = A(t_1)x(t_1)$. 而 P_t 沿着系统 (33) 的解 $x(t) = x(t, t_1, x_1^+)$ 所代表的弧继续运动直到在 $t_2 > t_1$ 遇到 $M(t)$. 从而 $P_{t_2}(t_2, x(t_2))$ 被变成 $P_{t_2^+} = (t_2, x_2^+) \in N(t)$ ，这里 $x_2^+ = A(t_2)x(t_2)$. 像前面一样，P_t 沿着系统 (33) 的解 $x(t) = x(t, t_2, x_2^+)$ 所代表的弧继续运动. 如果 P_t 系统 (33) 的解存在则一直进行下去. 我们将具有上述运动过程的 (i), (ii), (iii) 综合起来称为脉冲微分系统，由 P_t 所描述的弧称为积分弧，而积分弧所代表的函数称为脉冲微分系统的解.

一个脉冲微分系统的解有三种情况：(a) 是连续函数，这时积分弧不遇到 $M(t)$ 或在 $A(t)$ 的不动点遇到 $M(t)$; (b) 具有有限个不连续点的逐段连续函数，这时在 $A(t)$ 的有限个非不动点上遇到 $M(t)$; (c) 具有可数个不连续点的逐段连续函数，这时在 $A(t)$ 的可数个非不动点上遇到 $M(t)$.

P_t 碰到 $M(t)$ 时所在的时刻 t_k 称为脉冲时刻. 我们假设脉冲微分系统的解在所有脉冲时刻都是左连续的，即 $x(t_k^-) = \lim\limits_{h \to 0^+} x(t_k - h) = x(t_k)$.

下面我们就 (i), (ii), (iii) 的不同来描述不同的系统.

不依赖于状态的脉冲微分系统

设 $M(t)$ 表示一列面 $\{M_k | M_k = \{(t_k, x), x \in \Omega\}\}_{k=1}^{\infty}$, 这里 $t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$, 且 $\lim\limits_{k \to +\infty} t_k = +\infty$. 设算子 $A(t)$ 仅在 t_k 处有定义，满足

$$A(t_k) : \Omega \to \Omega, \qquad x \to A(t_k)x = x + I_k(x),$$

这里 $I_k : \Omega \to \Omega$. 因此，集合 $N(t)$ 仅与 t_k 有关且 $N(t_k) = A(t_k)M(t_k)$. 对于上面所选择的 $M(t_k)$, $N(t_k)$ 和 $A(t_k)$, 不依赖于状态的脉冲微分系统的数学模型如下：

$$\begin{cases} x' = f(t, x), & t \neq t_k, \ k = 1, 2, \cdots, \\ \Delta x = I_k(x), & t = t_k, \ k = 1, 2, \cdots. \end{cases} \tag{34}$$

系统 (34) 也可称为固定时刻脉冲微分系统.

依赖于状态的脉冲微分系统

设 $M(t)$ 表示一列面 $\{S_k | S_k = \{(t, \tau_k(x)) | t = \tau_k(x), x \in \Omega\}\}_{k=1}^{\infty}$, 这里 $\tau_1(x) < \tau_2(x) < \cdots < \tau_k(x) < \cdots$, 且 $\lim\limits_{k \to +\infty} \tau_k(x) = +\infty$. 设算子 $A(t)$ 满足

$$A(t) : \Omega \to \Omega, \qquad x \to A(t)x = x + I_k(x),$$

这里 $I_k : \Omega \to \Omega$. 因此，集合 $N(t) = A(t)M(t), t = \tau_k(x)$. 对于上面所选择的 $M(t)$,

$N(t)$ 和 $A(t)$, 依赖于状态的脉冲微分系统的数学模型如下:

$$\begin{cases} x' = f(t,x), & t \neq \tau_k(x), k = 1,2,\cdots, \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k(x), k = 1,2,\cdots. \end{cases} \tag{35}$$

定义 2(脉冲泛函微分系统)

(i)′ 考虑泛函微分系统

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x_t), \tag{36}$$

这里 $f : R^+ \times \Omega \to R^n$, $\Omega \subseteq PC([-\tau,0],R^n)$ 是开集, $PC([-\tau,0],R^n) = \{x : [-\tau,0] \to R^n | x(t)$ 在 $[-\tau,0]$ 上左连续, 在 $[-\tau,0]$ 上除有限个点外右连续, 且在这有限个点上右极限存在 $\}$ 是赋范空间, 范数为 $\|x\| = \sup\limits_{t\in[-\tau,0]} |x(t)|$, $R^+ = [0,+\infty); x_t(\theta) = x(t+\theta), \quad \theta \in [-\tau,0]$.

(ii)′ 集合 $M(t)$,$N(t) \subseteq \Omega'$, $\forall t \in R^+$, 这里 $\Omega' \subseteq R^n$ 是开集, 且 $\{x(t) | x \in \Omega, t \in [-\tau,0]\} \subseteq \Omega'\}$.

(iii)′ 算子 $A(t) : M(t) \to N(t)$, $\forall t \in R^+$.

按照与定义 1 同样的思想, 我们可以给出脉冲泛函微分系统, 脉冲泛函微分系统的解的定义. 不依赖于状态的脉冲泛函微分系统

$$\begin{cases} x' = f(t,x_t), & t \neq t_k, k = 1,2,\cdots, \\ \Delta x = I_k(x_t), & t = t_k, k = 1,2,\cdots \end{cases} \tag{37}$$

和依赖于状态的脉冲泛函微分系统

$$\begin{cases} x' = f(t,x_t), & t \neq \tau_k(x), k = 1,2,\cdots, \\ \Delta x = I_k(x_t), & t = \tau_k(x), k = 1,2,\cdots, \end{cases} \tag{38}$$

亦可类似定义.

注 在更广的情况下, 有些作者用 $I_k(t,x)$, $I_k(t,x_t)$ 分别代替 $I_k(x)$ 和 $I_k(x_t)$, 这种情况更复杂一些.

脉冲微分系统的初值条件和边值条件

对于脉冲微分系统和脉冲泛函微分系统, 我们分别列出不同的初值条件:

$$x(t_0^+) = x_0, \qquad (t_0,x_0) \in R^+ \times \Omega, \tag{39}$$

$$x(t_0^+) = x_0, x_{t_0} = \Phi, \qquad (t_0,x_0) \in R^+ \times \Omega', (t_0,\Phi) \in R^+ \times \Omega \tag{40}$$

和不同的边值条件

$$x(a^+) = x_0, x(b) = x_0', \qquad (a,x_0),(b,x_0') \in R^+ \times \Omega, \tag{41}$$

$$x(a^+) = x_0, x_{t_0} = \Phi, x(b) = x_0', \qquad (a, x_0), (b, x_0') \in R^+ \times \Omega', (t_0, \Phi) \in R^+ \times \Omega. \quad (42)$$

脉冲微分系统的研究始于 1960 年 V.D.Mil'man 和 A.D.Myshkis 的工作 (见 [5]). 自 20 世纪 80 年代, 逐渐引起微分系统学者、专家的关注并致力于从理论上对其进行研究 (见 [6]). 到 80 年代末对其研究已有一些重要成果发表. 譬如, 关于依赖于状态的脉冲微分系统解的基本理论已建立, 关于脉冲微分不等式的一些重要结果已出现, 关于脉冲微分系统稳定性理论的基本定理已得到等. 这些结果已被 V.Lakshimikantham 等进行了系统总结 [7], 其特点是所考虑的系统只含脉冲而不含时滞. 所得结果属该研究领域 90 年代前初始而基本的成果.

而自 90 年代以来脉冲微分系统更加引起微分系统学者专家的重视与兴趣, 对其研究日趋活跃, 已逐渐形成非线性微分系统研究领域的国际新热点. 作为非线性微分系统领域的一个新分支, 已获得一批新的重要研究成果, 特别是 90 年代末至本世纪初具有界滞量的脉冲微分系统解的存在性研究取得重要成果 [8~9] 以来, 具无穷延滞的脉冲泛函微分系统解的存在性定理相继建立 [10~11]. 在脉冲微分系统的基本理论、边值问题、稳定性理论等方面都获得了一批重要学术成果, 如得到了具有界滞量或无穷延滞的脉冲泛函微分系统解的唯一性定理、整体存在性定理、延展定理及解的连续依赖性定理; 建立了具依赖于状态的脉冲微分系统的比较原理; 利用高阶导数 V 函数法, 变分 V 函数法, 部分变元 V 函数法等新方法; 给出了脉冲摄动微分系统、脉冲混合微分系统、脉冲泛函微分系统等关于两个测度的稳定性定理; 建立了变动时刻的脉冲微分系统的周期边值问题; 有限区间上和无穷区间上二阶脉冲微分系统的边值问题及具有无穷延滞的脉冲泛函微分系统的边值问题等. 需要指出的是, 近年来作者在脉冲自治微分系统几何理论与脉冲偏微分系统振动理论方面发表了一系列文章, 借助一种具脉冲限的积分函数新方法得到了一维脉冲自治系统闭轨存在的充分必要条件, 还首次对奇点进行了分类; 建立了脉冲抛物系统、脉冲双曲系统及脉冲时滞抛物系统的振动准则. 本书总结了这些研究成果.

脉冲微分系统这一新的研究领域极具吸引力和挑战性. 在理论上, 它综合了连续和离散系统的特征, 但又超出了连续和离散系统的范围, 还存在若干亟待解决的带有根本性的基础研究课题: 关于脉冲自治系统的几何理论基本尚属空白, 脉冲偏微分系统的研究也刚刚起步, 具无穷延滞的脉冲微分系统解的性质的研究尚不多见, 特别是在"脉冲"、"时滞"共存甚至更复杂的情形下系统解的规律与特征尚需深入探索等. 在应用上, 脉冲微分系统源于实践, 在科技领域及工程技术中层出不穷, 一个有力的事实是: 近年来脉冲微分系统已成功地应用于通讯领域. 当前, 国内外关于脉冲微分系统的研究日益活跃, 研究队伍不断扩大, 这充分展现了它富有朝气的生命力, 也预示着它蓬勃发展的明天.

参考文献

1 D D Bainov, P S Simeonov. Systems with Impulse Effect:Stability, Theory and Applications. New York: Halsted Press. 1989

2 Xinzhi Liu, Alllan R, Willms. Impulsive controllability of linear dynamical systems with applications to maneuvers of spacecraft. MPE, 1996, 8: 12～32

3 林伟. 复杂系统中的若干理论问题及其应用. 复旦大学博士学位论文, 2002

4 顾凡及, 李训经, 阮炯. 动态神经元的网络模型. 生物物理学报, 1992, 8: 339～345

5 V D Mil'man, A D Myshkis. On the stability of motion in Nonlinear Mechanics. Sib. Math. J., 1960, 233～237

6 A M Samoolenko, N A Perestyuk. Differential Equations with Impulse Effect. Višča Škola, 1987

7 V Lakshimikantham, D D Bainov, P S Simeonov. Theory of Impulsive Differential Equations. World Scientific, Singapore, 1989

8 George Ballinger, Xinzhi Liu. Existence, uniqueness results for impulsive delay differential equations. Applicable Analysis, 2000, 74: 71～93

9 Xilin Fu, Baoqiang Yan. The global solutions of impulsive functional differential equations in Banach spaces. Nonlinear Studies, 2000, 1(1): 1～17

10 Xilin Fu, Baoqiang Yan. The global solutions of impulsive retarded functional differential equations. International Journal of Applied Mathematics, 2000, 3: 389～363

11 闫宝强, 傅希林. 具有无限时滞脉冲泛函微分方程解的存在性. 中国学术期刊文摘, 1999

第 1 章　脉冲微分系统的基本理论

本章主要讨论在脉冲的影响下，脉冲微分系统和脉冲泛函微分系统初值的基本理论，同时为以后的章节的研究作好准备.

在 §1.1 中，我们主要讨论脉冲微分系统初值问题局部解，整体解的存在性. 若无脉冲，在一定的条件下，微分系统初值问题具有解的存在性，但脉冲的影响会造成脉冲微分系统无解. 我们用的方法有 Schaulder 不动点定理，单调迭代方法以及局部凸空间的 Tychonoff 定理等. 给出脉冲微分系统的局部解和整体解的存在性是本节的基本工作. 讨论分为固定时刻脉冲微分系统和依赖于状态变化的变时刻脉冲微分系统两种情况. 随后我们讨论了解对初值的连续依赖性和可微性.

在 §1.2 中，我们主要讨论有限时滞脉冲微分系统初值问题和无限时滞脉冲泛函微分系统的局部解，整体解的存在性. 由于脉冲和时滞的同时出现，给脉冲泛函微分系统的研究带来了极大的困难. 例如，设 $x(t)=\begin{cases}0,\ t\in[-1,0),\\ 1,\ t\in[0,1]\end{cases}$ 及 $x_t(\theta)=x(t+\theta)$, $\theta\in[-1,0]$. 对 $t,t'\in(0,1)$， $t\neq t'$，有 $\|x_t-x_{t'}\|=\max\limits_{\theta\in[-1,0]}|x(t+\theta)-x(t'+\theta)|=1$. 因此 $\lim\limits_{t\to t',t\neq t'}\|x_t-x_{t'}\|=1$，则 x_t 在 $(0,1]$ 上处处不连续，也就是出现了这种情况：即使 $f(t,\phi)$ 是处处连续的， $f(t,x_t)$ 也可能处处不连续. 为了克服这一困难，George Ballinger， Xinzhi Liu 和我们推广了相空间理论 (见 [2],[7],[8])，建立了脉冲泛函微分系统基本理论. 使用的方法是 Schaulder 不动点定理和单调迭代方法. 最后讨论了脉冲泛函微分系统解对初值的连续依赖性.

§1.1　一般脉冲微分系统基本理论

1. 固定时刻脉冲微分系统的局部解和整体解

考察一阶脉冲常微分系统的初值问题 (IVP):

$$\begin{cases}x'=f(t,x), & t\neq t_k,k=1,2,\cdots,m,\cdots,\\ \Delta x\big|_{t=t_k}=I_k(x(t_k)), & k=1,2,\cdots,m,\cdots,\\ x(t_0^+)=x_0,\end{cases}\tag{1.1.1}$$

其中 $f\in C(R\times R,R)$, $R=(-\infty,+\infty)$, $I_k\in C(R,R)(k=1,2,\cdots,m,\cdots)$, $x_0\in R$, $t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots<+\infty$, $t_k\to+\infty$, $\Delta x\big|_{t=t_k}=x(t_k^+)-x(t_k)$, $x(t_k^+)$ 表示 $x(t)$ 在 $t=t_k$ 处的右极限.

注意 和一般初值问题不同，我们强调了限制条件 $x(t_0^+)=x_0$，主要是与变时刻脉冲微分系统统一起来.

定义 1.1.1 $x(t;t_0,x_0)$ 是系统 (1.1.1) 的解，$t\in(t_0,T)$ 是指：

(1) $x(t_0^+,t_0,x_0)=x_0$;

(2) 当 $T>t>t_0,\ t\neq t_k$ 时，$x'(t;t_0,x_0)=f(t,x(t;t_0,x_0))$;

(3) $\Delta x(t)|_{t=t_k}=x(t_k^+)-x(t_k)=I_k(x(t_k)),\qquad t_k<T$.

为了讨论系统 (1.1.1) 的解，我们先看系统列出下面的引理：

$$\begin{cases} x'=f(t,x), \\ x(t_0)=x_0, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

其中 $f\in C(R\times R,R)$, $R=(-\infty,+\infty)$.

由 [11] 和 [14], 我们有下面的引理：

引理 1.1.1 若函数 $f(t,x)$ 在 R^2 中某一区域

$$\overline{R}:|t-t_0|\leqslant a,\qquad |x-x_0|\leqslant b$$

上连续，且关于 x 满足 Lipschitz 条件，则存在 $h=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}>0$, 使得系统 (1.1.2) 在 $[t_0-h,t_0+h]$ 上存在唯一解 $x(t)$, 这里 $M=\max\limits_{(t,x)\in\overline{R}}|f(t,x)|$.

引理 1.1.2 若函数 $f(t,x)$ 在 R^2 中某一区域

$$\overline{R}:|t-t_0|\leqslant a,\qquad |x-x_0|\leqslant b$$

上连续，则存在 $h=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}>0$, 使得系统 (1.1.2) 在 $[t_0-h,t_0+h]$ 上至少存在一个解 $x(t)$, 这里 $M=\max\limits_{(t,x)\in\overline{R}}|f(t,x)|$.

引理 1.1.3 若函数 $f(t,x)$ 在 R^2 中某一区域 G 上连续，$(t_0,x_0)\in G$, 则系统 (1.1.2) 存在饱和解 $x(t)$.

引理 1.1.4 若函数 $f(t,x)$ 在 R^2 中某一区域 G 上连续，$G:T_0<t<T_1,x\in R$. 设系统 (1.1.2) 饱和解 $x(t)$ 的饱和存在区间为 (α,β), 则 α, β 必为下列情形之一：

(1) $\alpha=T_0(\beta=T_1)$;

(2) $T_0<\alpha(T_1>\beta)$, $\lim\limits_{t\to\alpha^+}|x(t)|=+\infty(\lim\limits_{t\to\beta^-}|x(t)|=+\infty)$.

引理 1.1.5 若函数 $f(t,x)$ 在 R^2 中某一区域 G 上连续，且

$$|f(t,x)|\leqslant\omega(t,|x|),$$

这里 $\omega(t,r)$ 是定义在 $\Omega: T_0 < t < T_1,\ 0 \leqslant r < +\infty$ 上的非负连续函数，且系统

$$\frac{dr}{dt} = \omega(t,r)$$

的解在 $T_0 < t < T_1$ 上整体存在，则系统 (1.1.2) 的解在 $t_0 \leqslant t < T_1$ 上整体存在.

引理 1.1.6 若函数 $f(t,x)$ 在 R^2 中某一区域 G 上连续， $(t_0,x_0) \in G$, 初值问题 (1.1.2) 在 (t_0,x_0) 有唯一的饱和解 $x(t;t_0,x_0)$, 饱和存在区间为 (ω^-,ω^+), 则对任意的 $[a,b] \subseteq (\omega^-,\omega^+)$, 只要 (t_0',x_0') 与 (t_0,x_0) 充分靠近，初值问题

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0') = x_0' \end{cases}$$

的解 $x(t;t_0',x_0')$ 都至少在 $[a,b]$ 上存在并且一致地有

$$x(t;t_0,x_0) \to x(t;t_0',x_0'), \qquad (t_0',x_0') \to (t_0,x_0).$$

引理 1.1.7 若函数 $f(t,x)$ 在 R^2 中某一区域 G 上连续，对任意 $(t_0,x_0) \in G$, 系统 (1.1.2) 存在唯一的饱和解 $x(t;t_0,x_0)$, $t \in (\omega^-(t_0,x_0),\omega^+(t_0,x_0))$, 则

(1) $\Omega: \omega^-(t_0,x_0) < t < \omega^+(t_0,x_0), (t_0,x_0) \in G$ 是一区域;

(2) $x(t;t_0,x_0)$ 是 Ω 上的连续函数.

引理 1.1.8 若函数 $f(t,x)$ 在 R^2 中某一区域 G 上连续，对 x 有连续的偏导数，则对每一个 $(t_0,x_0) \in G$, 系统 (1.1.2) 存在唯一的饱和解 $x(t;t_0,x_0)$, $t \in (\omega^-(t_0,x_0),\omega^+(t_0,x_0))$, 且它在 $\Omega: \omega^-(t_0,x_0) < t < \omega^+(t_0,x_0), (t_0,x_0) \in G$ 上是连续可微的.

定理 1.1.1 若函数 $f(t,x)$ 在 R^2 中某一区域 G 上连续且满足局部 Lipschitz 条件， $(t_0,x_0) \in G$, 则存在 $\delta > 0$ 使得系统 (1.1.1) 在 $(t_0,t_0+\delta]$ 上存在唯一解 $x(t)$, 满足 $x(t_0^+) = x_0$.

证明 考虑系统

$$\begin{cases} x' = f(t,x), & t > t_0, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

由引理 1.1.1, 存在 $t_1 - t_0 > \delta > 0$ 使得该系统在 $[t_0,t_0+\delta]$ 上存在唯一解 $x(t)$. 显然， $x(t)$ 在 $(t_0,t_0+\delta]$ 上是系统 (1.1.1) 的解，且 $x(t_0^+) = x_0$. □

定理 1.1.2 若函数 $f(t,x)$ 在 R^2 中某一区域 G 上连续， $(t_0,x_0) \in G$, 则存在 $\delta > 0$ 使得系统 (1.1.1) 在 $(t_0,t_0+\delta]$ 上至少存在一个解 $x(t)$, 满足 $x(t_0^+) = x_0$.

证明 考虑系统

$$\begin{cases} x' = f(t,x), & t > t_0, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

由引理 1.1.2, 存在 $t_1-t_0>\delta>0$ 使得该系统在 $[t_0,t_0+\delta]$ 上至少存在一个解 $x(t)$. 显然, $x(t)$ 在 $(t_0,t_0+\delta]$ 上是系统 (1.1.1) 的解, 且 $x(t_0^+)=x_0$. □

定理 1.1.3 若 $f(t,x)\in C(R\times R,R)$, 则 IVP(1.1.1) 存在饱和解 $x(t)$, $t\in(t_0,t_0+\beta)$, 且若 $\beta<+\infty$, 则一定有 $\lim\limits_{t\to\beta^-}|x(t)|=+\infty$.

证明 事实上, 由引理 1.1.3, 系统 (1.1.2) 的局部解一定可以延展. 若其饱和存在区间之右端点 $\beta'\leqslant t_1$, 则系统 (1.1.1) 的饱和解仅在 (t_0,β') 存在. 若 $\beta'>t_1$, 我们考虑系统

$$\begin{cases}x'=f(t,x), & t>t_1,\\ x(t_1^+)=x(t_1)+I_1(x(t_1)).\end{cases}\tag{1.1.3}$$

和前面的讨论一样, 我们可以讨论该系统饱和存在区间的存在性. 这样我们一直讨论下去. 我们可以得到系统 (1.1.1) 饱和解的存在性. 若 $\beta<+\infty$, 则存在 $k\geqslant 1$, 使得 $\beta\in(t_k,t_k]$, 从而在 $[t_k,\beta)$ 上, 系统 (1.1.1) 的解也是系统

$$\begin{cases}x'=f(t,x), & t>t_k,\\ x(t_k^+)=x(t_k)+I_k(x(t_k))\end{cases}$$

的解, 从而由引理 1.1.4, $\lim\limits_{t\to\beta^-}|x(t)|=+\infty$. □

下面我们考虑整体解. 令 $J=(t_0,+\infty)$, $PC(J,R)=\{x:(t_0,+\infty)\to R|x(t)$ 当 $t\neq t_k$ 时连续, $x(t)$ 在 $t=t_k(k\geqslant 1)$ 时左连续, $x(t_k^+)$ 存在, $k=0,2,\cdots\}$. 对任意 x, $y\in PC(J,R)$, 定义

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|(x-y)|_{(t_0,t_n]}\|}{1+\|(x-y)|_{(t_0,t_n]}\|},$$

这里 $\|(x-y)|_{(t_0,t_n]}\|=\sup\limits_{t\in(t_0,t_n]}|x(t)-y(t)|$. 显然, 在该距离下 $PC(J,R)$ 是一 Frechet 空间. 令 $J_0=(t_0,t_1]$, $J_1=(t_1,t_2]$, $\cdots$, $J_{m-1}=(t_{m-1},t_m]$, $\cdots$, $J'=J-\{t_1,t_2,\cdots\}$.

引理 1.1.9 $H\in PC(J,R)$ 是相对紧集的充分必要条件是 H 中的所有函数在每个 $J_k(k=1,2,\cdots)$ 上一致有界等度连续.

证明 由 Arzela-Ascoli 定理即得. □

定理 1.1.4 若 $f(t,x)$ 在 R^2 上连续且 R^2 上满足 Lipschitz 条件, 即存在 $N>0$ 使得对任给得 (t,x), $(t,x')\in J\times R$, 都有

$$|f(t,x)-f(t,x')|\leqslant N|x-x'|$$

恒成立, 则 IVP(1.1.1) 在 $(t_0,+\infty)$ 上有且仅有一个解.

证明 首先我们考虑系统

$$\begin{cases}x'=f(t,x),\\ x(t_0)=x_0.\end{cases}\tag{1.1.4}$$

由引理 1.1.1 知，系统 (1.1.4) 存在唯一解 $x_0(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. 下面我们考虑

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_1) = x_0(t_1) + I_1(x_0(t_1)). \end{cases} \tag{1.1.5}$$

同样由引理 1.1.1 知，系统 (1.1.5) 存在唯一解 $x_1(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. 依次类推，我们可以得到

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_m) = x_{m-1}(t_m) + I_m(x_{m-1}(t_m)) \end{cases} \tag{1.1.6}$$

的解 $x_m(t)$, $t \in [t_m, t_{m+1}]$, $m = 1, 2, \cdots$.

定义

$$x(t;t_0,x_0) = \begin{cases} x_0(t), & t \in (t_0, t_1], \\ x_1(t), & t \in (t_1, t_2], \\ \vdots & \vdots \\ x_m(t), & t \in (t_m, t_{m+1}], \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

易证 $x(t;t_0,x_0)$ 的确是 (1.1.1) 的唯一解， $t \in (t_0, +\infty)$. □

定理 1.1.5 若存在非负连续函数 $w(t,x)$ 使得对任意的 $(t,x) \in R \times R$, 都有

$$|f(t,x)| \leqslant w(t,x),$$

且系统 $r' = w(t,x)$ 的所有解在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在，则 IVP(1.1.1) 在 $(t_0, +\infty)$ 上存在解.

证明 首先我们考虑系统

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.1.7}$$

由引理 1.1.2 和引理 1.1.5, 系统 (1.1.7) 在 $[t_0, t_1]$ 上存在解 $x_0(t)$. 下面我们考虑

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_1) = x_0(t_1) + I_1(x_0(t_1)). \end{cases} \tag{1.1.8}$$

同样由引理 1.1.2 和引理 1.1.5, 系统 (1.1.8) 在 $[t_1, t_2]$ 上存在解 $x_1(t)$. 依次类推，我们可以得到

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_m) = x_{m-1}(t_m) + I_m(x_{m-1}(t_m)) \end{cases} \tag{1.1.9}$$

的解 $x_m(t), t \in [t_m, t_{m+1}]$. 定义

$$x(t;t_0,x_0) = \begin{cases} x_0(t), & t \in (t_0, t_1], \\ x_1(t), & t \in (t_1, t_2], \\ \vdots & \vdots \\ x_m(t), & t \in (t_m, t_{m+1}], \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

易见 $x(t;t_0,x_0)$ 是 (1.1.1) 的解. □

对固定的 $h \in PC(J,R)$ 及实数 M, 考察脉冲线性微分系统初值问题

$$\begin{cases} x' = f(t,h(t)) - M(x - h(t)), & t \neq t_k, k = 1,2,\cdots, \\ \Delta x\big|_{t=t_k} = I_k(h(t_k)), & k = 1,2,\cdots, \\ x(t_0^+) = x_0. \end{cases} \tag{1.1.10}$$

引理 1.1.10 线性脉冲系统 IVP(1.1.10) 在 $PC(J,R) \cap C^1(J',R)$ 中具有唯一解 $x(t)$ 且表达式为

$$\begin{aligned} x(t) = x_0 e^{-M(t-t_0)} &+ \int_{t_0}^{t} e^{-M(t-s)}[f(s,h(s)) + Mh(s)]ds \\ &+ \sum_{t_0<t_k<t} e^{-M(t-t_k)} I_k(h(t_k)), \qquad t \in (t_0, +\infty). \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

证明 由定理 1.1.4, 该系统存在唯一解. 另一方面, 直接求导可知 $x(t)$ 的确是系统 (1.1.10) 的解. □

考察算子

$$\begin{aligned} (Ax)(t) = x_0 e^{-M(t-t_0)} &+ \int_{t_0}^{t} e^{-M(t-s)}[f(s,x(s)) + Mx(s)]ds \\ &+ \sum_{t_0<t_k<t} e^{-M(t-t_k)} I_k(x(t_k)), \qquad t \in (t_0, +\infty). \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

引理 1.1.11 由 (1.1.12) 定义的算子 A 是映 $PC(J,R)$ 入 $PC(J,R)$ 的连续算子.

证明 由表达式 (1.1.12) 知 A 映 $PC(J,R)$ 入 $PC(J,R)$, 且若 $y_n \in PC(J,R)$, $y_0 \in PC(J,R)$ 且 $d(y_n,y_0) \to 0$, 则任给 $k > 0$, $\|(y_n - y_0)|_{(t_0,t_k]}\| \to 0$, 从而, 对任意的 $k > 0$, 有 $\dfrac{\|(y_n - y_0)|_{(t_0,t_k]}\|}{1 + \|(y_n - y_0)|_{(t_0,t_k]}\|} \to 0$. 所以 $d(Ay_n, Ay_0) \to 0$. 因此 A 是连续的. □

引理 1.1.12 $x \in PC(J,R) \cap C^1(J',R)$ 是 IVP(1.1.1) 的解当且仅当 $x \in PC(J,R)$ 是算子 A 的不动点.

证明　由引理 1.1.10 即得. □

下面, 将用到空间 $PC(J,R)$ 中的区间 $[u,v](u,v\in PC(J,R)$ 且 $u\leqslant v$, 即 $u(t)\leqslant v(t)$, $t\in(t_0,+\infty))$. 定义 $[u,v]=\{x\in PC(J,R)\big|u\leqslant x\leqslant v$, 即 $u(t)\leqslant x(t)\leqslant v(t)$, $t\in(t_0,+\infty)\}$.

定义 1.1.2　$u\in PC(J,R)\cap C^1(J',R)$ 称为 IVP(1.1.1) 的一个下解, 如果

$$\begin{cases} u'\leqslant f(t,u), & t\neq t_k, k=1,2,\cdots,m,\cdots,\\ \Delta u\big|_{t=t_k}=I_k(u(t_k)), & k=1,2,\cdots,m,\cdots,\\ u(t_0^+)\leqslant x_0. \end{cases} \tag{1.1.13}$$

同样, $v\in PC(J,R)\cap C^1(J',R)$ 称为 IVP(1.1.1) 的一个上解, 如果

$$\begin{cases} v'\geqslant f(t,v), & t\neq t_k, k=1,2,\cdots,m,\cdots,\\ \Delta v\big|_{t=t_k}=I_k(v(t_k)), & k=1,2,\cdots,m,\cdots,\\ v(t_0^+)\geqslant x_0. \end{cases} \tag{1.1.14}$$

定理 1.1.6　设 u_0,v_0 分别是 IVP(1.1.1) 的一个下解和一个上解, 并且 $u_0(t)\leqslant v_0(t)$. 假设存在实数 M, 使得

$$f(t,x)-f(t,y)\geqslant -M(x-y),\qquad \forall t\in J, u_0(t)\leqslant y\leqslant x\leqslant v_0(t). \tag{1.1.15}$$

又设

$$I_k(x)\geqslant I_k(y),\qquad \forall u_0(t_k)\leqslant y\leqslant x\leqslant v_0(t_k), k=1,2,\cdots, \tag{1.1.16}$$

则 IVP(1.1.1) 在 $[u_0,v_0]\cap C^1(J',R)$ 中存在最小解 $x_*(t)$ 和最大解 $x^*(t)$, 且当 $n\to+\infty$ 时 $u_n(t)\to x_*(t)$, $v_n(t)\to x^*(t)$, 在 J 的任意有界闭区间上一致成立, 这里

$$\begin{aligned} u_n(t)&=x_0e^{-M(t-t_0)}+\int_{t_0}^t e^{-M(t-s)}[f(s,u_{n-1}(s))+Mu_{n-1}(s)]ds\\ &\quad+\sum_{t_0<t_k<t}e^{-M(t-t_k)}I_k(u_{n-1}(t_k)),\\ v_n(t)&=x_0e^{-M(t-t_0)}+\int_{t_0}^t e^{-M(t-s)}[f(s,v_{n-1}(s))+Mv_{n-1}(s)]ds\\ &\quad+\sum_{t_0<t_k<t}e^{-M(t-t_k)}I_k(v_{n-1}(t_k)),\\ &\qquad n=1,2,\cdots, \end{aligned}$$

它们满足

$$\begin{aligned} u_0(t)&\leqslant u_1(t)\leqslant\cdots\leqslant u_n(t)\leqslant x_*(t)\leqslant x^*(t)\\ &\leqslant\cdots\leqslant v_n(t)\leqslant\cdots\leqslant v_1(t)\leqslant v_0(t),\qquad t\in J. \end{aligned} \tag{1.1.17}$$

证明 根据引理 1.1.12, 需证明算子 A 在 $[u_0, v_0]$ 中有最小不动点和最大不动点. 当 $u_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant v_0$ 时 (即 $u_0(t) \leqslant x_1(t) \leqslant x_2(t) \leqslant v_0(t), \forall t \in J$), 由 (1.1.15) 和 (1.1.16), 可见

$$f(t, x_1(t)) + Mx_1(t) \leqslant f(t, x_2(t)) + Mx_2(t), \qquad \forall t \in J,$$

$$I_k(x_1(t_k)) \leqslant I_k(x_2(t_k)), \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

故由 (1.1.12) 知 $(Ax_1)(t) \leqslant (Ax_2)(t)$, $t \in (t_0, +\infty)$, 即 $Ax_1 \leqslant Ax_2$. 因此, A 是增算子. 令 $u_1 = Au_0$, $w = u_1 - u_0$. 由系统 1.1.10 可知

$$\begin{cases} u_1' = f(t, u_0) - M(u_1 - u_0), & t \neq t_k, k = 1, 2, \cdots, m, \cdots, \\ \Delta u_1\big|_{t=t_k} = I_k(u_0(t_k)), & k = 1, 2, \cdots, m, \cdots, \\ u_1(t_0^+) = x_0. \end{cases} \tag{1.1.18}$$

再注意到 u_0 是下解, 由 (1.1.15) 和 (1.1.16) 知

$$\begin{cases} w' = u_1' - u_0' \geqslant f(t, u_0) - M(u_1 - u_0) - f(t, u_0) = -Mw, \\ \qquad\qquad t \neq t_k, k = 1, 2, \cdots, m, \cdots, \\ \Delta w\big|_{t=t_k} = \Delta u_1\big|_{t=t_k} - \Delta u_0\big|_{t=t_k} \geqslant 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, m, \cdots, \\ w(t_0^+) = u_1(t_0^+) - u_0(t_0^+) \geqslant x_0 - x_0 = 0, \end{cases} \tag{1.1.19}$$

从而

$$(we^{Mt})' = (w' + Mw)e^{Mt} \geqslant 0, \qquad t \neq t_k, k = 1, 2, \cdots, m, \cdots. \tag{1.1.20}$$

故

$$w(t) \geqslant w(t_0^+)e^{-m(t-t_0)}, \qquad \forall t \in J_0 = (t_0, t_1].$$

特别地, $w(t_1) \geqslant 0$. 由 (1.1.19) 可知, $\Delta w\big|_{t=t_1} \geqslant 0$, 故

$$w(t_1^+) = w(t_1) + \Delta w\big|_{t=t_1} \geqslant 0.$$

又根据 (1.1.20), 可知

$$w(t) \geqslant w(t_1^+)e^{-M(t-t_1)} \geqslant 0, \qquad \forall t \in J_1.$$

类似地, 可证 $w(t) \geqslant 0, \forall t \in J_2, J_3, \cdots, J_m, \cdots$, 也就是, $w(t) \geqslant 0$. 所以, $u_0 \leqslant Au_0 = u_1$. 定义 $u_n = Au_{n-1}$, $n = 1, 2, \cdots$, 利用相似的证明可知 $u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant v_0$. 因而, $\{u_n(t)\}$ 是有界单增函数列. 由单调有界性定理可知存在函

数 $x_*(t)$, 使得 $u_n(t) \to x_*(t)$, $n \to +\infty$. 另外，由于 A 是连续算子，在任意有界闭区间上，$u_n(t) \overset{一致}{\longrightarrow} x_*(t)$, $n \to +\infty$. 所以 $x_* \in PC(J,R)$. 另一方面，由于

$$u_n(t) = x_0 e^{-M(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} [f(s,u_{n-1}(s)) + M u_{n-1}(s)]ds + \sum_{t_0<t<t_k} e^{-M(t-t_k)} I_k(u_{n-1}(t_k)), \qquad t \in (t_0,+\infty),$$

且 $f(t,x)$, $I_k(k \geqslant 1)$ 是连续的，令 $n \to +\infty$, 可知

$$x_*(t) = x_0 e^{-M(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} [f(s,x_*(s)) + M x_*(s)]ds + \sum_{t_0<t<t_k} e^{-M(t-t_k)} I_k(x_*(t_k)),$$

即 $x_*(t)$ 是系统 (1.1.1) 的解，$t \in (t_0,+\infty)$.

同样，定义 $v_n = Av_{n-1}$, $n = 1,2,\cdots$. 同理可证，$u_0 \leqslant \cdots \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant v_3 \leqslant v_2 \leqslant v_1$, 在任意有界闭区间上，$v_n(t) \overset{一致}{\longrightarrow} x^*(t)$, $n \to +\infty$, 且 $x^*(t)$ 是系统 (1.1.1) 的解. 易见 $u_0(t) \leqslant u_1(t) \leqslant \cdots \leqslant u_n(t) \leqslant \cdots \leqslant x_*(t) \leqslant x^*(t) \leqslant \cdots \leqslant v_n(t) \leqslant \cdots \leqslant v_1(t) \leqslant v_0(t)$, $t \in (t_0,+\infty)$. 最后，对任意系统 (1.1.1) 在 $[u_0,v_0]$ 中的解 $x(t)$. 由于 $u_0 \leqslant x \leqslant v_0$ 及 A 的单调性知 $Au_0 = u_1 \leqslant Ax = x \leqslant Av_0 \leqslant v_0$. 依次类推，可知 $u_n \leqslant x \leqslant v_n$, $n = 1,2,\cdots$. □

定理 1.1.7 设 u_0, v_0 分别是 IVP(1.1.1) 的一个下解和一个上解，并且 $u_0(t) \leqslant v_0(t)$, 则系统 IVP(1.1.1) 在 $[u_0,v_0] \cap C^1(J',R)$ 中至少有一个解.

证明 定义

$$f^*(t,x) = \begin{cases} f(t,u_0(t)), & x < u_0(t), \\ f(t,x), & u_0(t) \leqslant x \leqslant v_0(t), \\ f(t,v_0(t)), & x > v_0(t), \end{cases}$$

$$I_k^*(x) = \begin{cases} I_k(u_0(t_k)), & x < u_0(t_k), \\ I_k(x), & u_0(t_k) \leqslant x \leqslant v_0(t_k), \\ I_k(v_0(t_k)), & x > v_0(t_k), \quad k = 1,2,\cdots. \end{cases}$$

现在考虑系统

$$\begin{cases} x' = f^*t,x), & t \neq t_k, k = 1,2,\cdots, \\ \Delta x\big|_{t=t_k} = I_k^*(x(t_k)), & k = 1,2,\cdots, \\ x(t_0^+) = x_0. \end{cases} \tag{1.1.21}$$

若 $x^*(t)$, $t \in (t_0,+\infty)$ 是该系统的解，下面要证明 $u_0(t) \leqslant x(t) \leqslant v_0(t)$, $t \in (t_0,+\infty)$. 反证法，若不然，则存在 $t^* \in (t_k,t_{k+1}] \subseteq (t_0,+\infty)$ 使得 $x^*(t^*) < u_0(t^*)$. 令 $r' =$

$\inf\{t_k < t < t^*|x^*(s) < u_0(s), \forall s \in [t, t^*]\}$, $r = \sup\{t_{k+1} > t > t^*|x^*(s) < u_0(s), \forall s \in [t^*, t]\}$. 若 $r' > t_k$, 则 $x^*(r') = u_0(r')$, $x^*(t) < u_0(t)$, $t \in (r', t^*]$; 若 $r' = t_k$, 则有两种可能性：一是 $x^*(r'^+) = u_0(r'^+)$, $x^*(t) < u_0(t)$, $t \in (r', t^*]$, 这与上面类似；二是 $x^*(t_k^+) < u_0(t_k^+)$, $x^*(t) < u_0(t)$, $\forall t \in (t_k, t^*]$. 对后一种情况，若 $x^*(t_k) \geqslant u_0(t_k)$, 则 $x^*(t_k^+) = x^*(t_k) + I_k^*(x^*(t_k)) \geqslant x^*(t_k) + I_k(u_0(t_k)) \geqslant u_0(t_k) + \Delta u_0|_{t=t_k} = u_0(t_k^+)$, 矛盾. 因此，$x^*(t_k) < u_0(t_k)$. 这样我们可以按上面 r' 的取法再取出类似 r' 的点，一直取下去，不妨仍记为 r'. 由于 $x^*(t_0^+) = x_0 \geqslant u_0(t_0^+)$, 这样的 r' 一定可以取到，并且满足 $x^*(r'^+) = u_0(r'^+)$, $x^*(t) < u_0(t)$, $\forall t \in (r', t^*]$. 对于 r, 我们进行同样的讨论. 若 $r < t_{k+1}$, 则 $x^*(r) = u_0(r)$, $x^*(t) < u_0(t)$, $\forall t \in [t^*, r]$; 若 $r = t_{k+1}$, 则有两种情况：一是 $x^*(t_{k+1}) = u_0(t_{k+1})$, 这与上面的 r 一样；二是 $x^*(t_{k+1}) < u_0(t_{k+1})$, 则 $x^*(t_{k+1}^+) = x^*(t_{k+1}) + I_{k+1}^*(x^*(t_{k+1})) = x^*(t_{k+1}) + I_{k+1}(u_0(t_{k+1})) < u_0(t_{k+1}) + I_{k+1}(u_0(t_{k+1})) = u_0(t_{k+1}^+)$, 这样我们可以按照上面 r 的取法取出类似 r 的点，一直取下去，不妨仍记为 r(r 可能是 $+\infty$). 若 $r < +\infty$, 则有 $x^*(r) = u_0(r)$, $x^*(t) < u_0(t)$, $\forall t \in [t^*, r)$. 若 $r = +\infty$, 则 $x^*(t) < u_0(t)$, $t \in [t^*, +\infty)$. 定义 $z(t) = u_0(t) - x^*(t)$, 可知

$$\begin{cases} z'(t) = u_0'(t) - x^{*\prime}(t) \leqslant f(t, u_0(t)) - f(t, u_0(t)) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \neq t_1, t_2, \cdots, t \in (r', r), \\ \Delta z|_{t=t_k} = \Delta u_0|_{t=t_k} - \Delta x^*|_{t=t_k} = 0, \qquad t_k \in (r', r), \\ z(r'^+) = 0. \end{cases}$$

由此可得，$z(t) \leqslant 0$, $t \in (r', r)$, 即 $u_0(t) \leqslant x^*(t)$, $t \in (r', r)$, 与 $x^*(t^*) < u_0(t^*)$ 矛盾. 也就是，$u_0(t) \leqslant x^*(t)$, $\forall t \in (t_0, +\infty)$. 同样，我们可以证明，$x^*(t) \leqslant v_0(t)$, $\forall t \in (t_0, +\infty)$.

下面我们证明系统 (1.1.1) 有解. 事实上，对 $x \in PC(J, R)$, 定义

$$(A^*x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f^*(s, x(s))ds + \sum_{t_0 < t_k < t} I_k^*(x(t_k)). \tag{1.1.22}$$

与引理 1.1.11 类似，可证 A^* 是映 $PC(J, R)$ 入 $PC(J, R)$ 的连续算子，且 $A^*(PC(J, R))$ 是相对紧集. 根据 Tychonoff 定理，A^* 在 $PC(J, R)$ 中至少有一个不动点 x^*. 由于 $u_0(t) \leqslant x^*(t) \leqslant v_0(t)$, 可见 $x^*(t)$ 也是系统 (1.1.1) 的解. □

例 1.1.1 考虑系统

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{8}(1 + \cos^2(x - |x|^{\frac{1}{2}})), \qquad t \neq \dfrac{1}{2}, t \in (0, +\infty), \\ \Delta x\Big|_{t=\frac{1}{2}} = x\left(\dfrac{1}{2}\right), \\ x(0^+) = 0, \end{cases} \tag{1.1.23}$$

则该系统至少存在一个解.

证明　令 $u_0(t) \equiv 0, t \in [0, +\infty)$,

$$v_0(t) = \begin{cases} t, & t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ t + \dfrac{1}{2}, & t \in \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right). \end{cases}$$

易见 $u_0(t)$ 和 $v_0(t)$ 是满足条件的下解和上解. 由定理 1.1.7, 知该系统至少有一个解. □

2. 依赖于状态的脉冲微分系统的局部解和整体解

令 $\{S_k\}$ 是一列曲线: $S_k : t = \tau_k(x), k = 1, 2, \cdots$, 使得 $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$ 且 $\lim\limits_{k \to +\infty} \tau_k(x) = +\infty$. 考虑系统

$$\begin{cases} x' = f(t, x), & t \neq \tau_k(x), \\ \Delta x\big|_{t=\tau_k(x)} = I_k(x), \\ x(t_0^+) = x_0, \end{cases} \tag{1.1.24}$$

这里 $f : R \times R \to R, I_k : R \to R$. 该系统比固定时刻的脉冲微分系统更复杂.

定义 1.1.3　若函数 $x : (t_0, a] \to R$ 满足:

(1) $x(t_0^+) = x_0$;

(2) $x(t)$ 在 $t \in (t_0, a], t \neq \tau_k(x(t))$ 连续可微且满足 $x'(t) = f(t, x(t))$;

(3) 当 $t \in (t_0, a]$ 且 $t = \tau_k(x(t))$ 时, 有 $x(t^+) = x(t) + I_k(x(t))$, 且在这样的 t 点我们一直假设 $x(t)$ 是左连续, 且存在 $\delta_t > 0$ 使得对 $\forall s \in (t, t + \delta_t), \forall j \geqslant 1$ 一定有 $s \neq \tau_j(x(s))$, 则称 $x(t; t_0, x_0)$ 是系统 (1.1.24) 的解.

与一般微分系统不同, 系统 (1.1.24) 可能无解, 即使 f 是连续的 (或连续可微的), 因为 $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ 的解可能全部在某一 S_k 上.

例 1.1.2　考虑系统

$$\begin{cases} x' = 1, & t \neq \tau_k(x), t \geqslant 0, \\ \Delta x\big|_{t=\tau_k(x)} = x^2 \mathrm{sgn} x - x, & k = 0, 1, 2, \cdots, \\ x(0^+) = 0, \end{cases}$$

这里 $\tau_k(x) = x + 6k, S_k : t = \tau_k(x), k = 0, 1, \cdots,\quad |x| < 3$. 注意到 $(0, 0) \in S_0$. 函数 $x(t) = t$ 满足 $x'(t) = 1, t > 0$, 且 $x(0^+) = 0, \Delta x|_{t=0} = \tau_0(x(0)) = 0$. 可见该解一直在 S_0 上. 所以该系统无解.

下面我们给出系统 (1.1.24) 局部解存在的条件.

定理 1.1.8 设

(1) $f:(t_0,t_0+a)\times R\to R$ 连续, 对每一个 $(t,x)\in R$, 存在函数 $l\in L^1_{\rm loc}$ 使得对 (t,x) 的某一邻域内的点 (s,y) 都有

$$|f(s,y)|\leqslant l(s);$$

(2) 对每一个 k, 若 $t_1=\tau_k(x_1)$, 则一定存在 $\delta>0$ 使得对任意的 $(t,x)\in\{(t,x)\big|0<t-t_1<\delta,|x-x_1|<\delta\}$ 都有

$$t\neq\tau_k(x), \tag{1.1.25}$$

则对每一 $(t_0,x_0)\in R^2$, 系统 (1.1.24) 存在解 $x(t),t\in(t_0,t_0+\alpha),0<t_0+\alpha\leqslant a$.

证明 若对任意的 k 都有 $t_0\neq\tau_k(x_0)$, 则结论是显然的. 若存在某一个 k, 使 $t_0=\tau_k(x_0)$, 则由 f 的连续性知 $\begin{cases}x'=f(t,x),\\x(t_0^+)=x_0\end{cases}$ 存在局部解 $x(t)$. 由于当 $i<j$ 时, $\tau_i(x)<\tau_j(x)$, 可见当 t 充分靠近 t_0 时一定有 $t\neq\tau_j(x(t))$ 对 $j\neq k$ 都成立. 另一方面, 由条件 (1.1.25) 知当 t 从右边靠近 t_0 时, $t\neq\tau_k(x(t))$. 所以 $x(t)$ 是系统 (1.1.24) 的局部解. □

显然条件 (1.1.25) 仅对某些非正则函数成立. 因为对于 $\tau_k(x)$, 只要 $\tau'(x_0)\neq0$, 由隐函数定理知 (1.1.25) 肯定不成立. 然而, 下面的定理 $\tau_k(x)$ 满足正则性条件.

定理 1.1.9 设

(1) $f:(t_0,t_0+a]\times R\to R$ 连续;

(2) $\tau_k:R\to(0,+\infty)$ 可微, $k=1,\cdots$;

(3) 对任给的 $t_1=\tau_k(x_1)$, 存在 $\delta>0$ 使得对任意的 $(t,x)\in\{(t,x)\big|0<t-t_1<\delta,|x-x_1|<\delta\}$ 都有

$$\tau_k'(x)\cdot f(t,x)\neq1,$$

则对每一个 $(t_0,x_0)\in R^2$, 系统 (1.1.24) 存在解 $x(t),t\in(t_0,t_0+\alpha)$.

证明 若对任意的 k 都有 $t_0\neq\tau_k(x_0)$, 则结论是显然的. 若存在某一个 k, 使 $t_0=\tau_k(x_0)$, 则由 f 的连续性知 $\begin{cases}x'=f(t,x),\\x(t_0^+)=x_0\end{cases}$ 存在局部解 $x(t)$. 令 $\sigma(t)=t-\tau_k(x(t))$, 则 $\sigma(t_0^+)=0$ 且当 t 从右边充分靠近 t_0 时

$$\sigma'(t)=1-\tau_k'(x(t))f(t,x(t))\neq0.$$

因此在 t_0 的某一右邻域上 $\sigma(t)$ 是严格单调的. 从而在该右邻域中 $t\neq\tau_k(x(t))$, $t>t_0$. 剩余的证明和上定理一样. □

对于初值问题 (1.1.24), 注意下面两点:

(1) 若对任意的 k, $t_0 \neq \tau_k(x_0)$, 系统 (1.1.24) 的局部解与过去无脉冲的情况一样;

(2) 若存在 k, $t_0 = \tau_k(x_0)$, 系统 (1.1.24) 的局部解与 τ_k 的光滑性有关.

若系统 (1.1.24) 的解在 (t_0, t_0+a) 上存在, 脉冲点为 $\{t_i\}, t_0 < t_i < t_0+a, t_i < t_j$, $i < j$, 将 $x(t; t_0, x_0)$ 记为

$$x(t;t_0,x_0) = \begin{cases} x(t;t_0,x_0), & t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ x(t;t_1,x_1^+), & t_1 < t \leqslant t_2, \\ \vdots & \vdots \\ x(t;t_i,x_i^+), & t_i < t \leqslant t_{i+1}, \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

这里 $x_i^+ = x_i + I_k(x_i)$, $x_i = x(t_i)$. 因此, 即使对任意的 k, $t_0 \neq \tau_k(x_0)$, 仍可能存在某一 i, 使 $(t_i, x_i^+) \in S_j$. 在这种情况下系统 (1.1.24) 在区间 $(t_i, t_{i+1}]$ 上的解就是上面的注意点 (2) 意义下的解. 这表明即使 (t_0, x_0) 不在任何一个 S_k 上, 我们也要考虑在上面第二种情况的解.

下面我们考虑系统 (1.1.24) 局部解的右向延展. 同过去的一般系统的定义一样, 若 $x(t), t \in (t_0, a)$, $y(t), t \in (t_0, b)$ 是系统 (1.1.24) 的解, 且 $b > a$. 当 $\forall t \in (t_0, a)$ 时, $x(t) \equiv y(t)$, 则称 $y(t)$ 是 $x(t)$ 的右向延展. 若解 $x(t), t \in (t_0, a)$ 不存在右向延展, 则称 $x(t)$ 是系统 (1.1.24) 的右向饱和解, (t_0, a) 是该解的右向最大存在区间. 对于系统 (1.1.24) 饱和解的存在性, 我们有如下的定理.

定理 1.1.10　设

(1) $f: R^2 \to R$ 连续;

(2) $I_k \in C(R, R)$, $\tau_k \in C(R, (0, +\infty))$, $\forall k \geqslant 1$.

若下面的三个条件之一成立:

(1) 对任意的 $k \geqslant 1$, 当 $t_1 = \tau_k(x_1)$ 时存在 $\delta > 0$ 使得对任意的 $(t, x) \in \{(t,x) | 0 < t - t_1 < \delta, |x - x_1| < \delta\}$, 都有 $t \neq \tau_k(x)$;

(2) 对所有的 $k \geqslant 1$, 当 $t_1 = \tau_k(x_1)$ 时有 $t_1 \neq \tau_j(x_1 + I_k(x_1))$, $\forall j \geqslant 1$;

(3) $\tau_k \in C^1(R, (0, +\infty))$, $\forall k \geqslant 1$, 且当 $t_1 = \tau_k(x_1)$ 时存在 j 使 $t_1 = \tau_j(x_1 + I_k(x_1))$ 及

$$\frac{d\tau_j(x_1^+)}{dx} \cdot f(t_1, x_1^+) \neq 1, \tag{1.1.26}$$

这里 $x_1^+ = x_1 + I_k(x_1)$, 而系统 (1.1.24) 的饱和解 $x(t)$ 的存在区间 (t_0, b) 是有限的, 则

$$\lim_{t \to b^-} |x(t)| = +\infty.$$

证明 反证法. 若结论不成立, 则严格单调递增序列 $\{t_n \geqslant t_0\}$, 当 $t_n \to b$ 时, $x(t_n) \to x^*$ 存在有限. 我们说若 (t,x) 满足对任意的 $k \geqslant 1$, 都有 $t \neq \tau_k(x)$, 则称 (t,x) 是正则点, 否则称为非正则点. 对 $(t,x) \in R^2$, $t > 0$, 令

$$B_r(t,x) = \{(s,y) \in R^2 \| s-t| \leqslant r, |y-x| \leqslant r\}, \qquad B_r(x) = \{y \| y-x| \leqslant r\}.$$

首先假设 (b,x^*) 是正则点, 则存在 $r_1 > 0$ 使得所有的 $(t,x) \in B_{r_1}(b,x^*)$ 是正则点, 因为 $\tau_k(x)$ 关于 x 连续, 关于 k 单增. 由于 f 是连续的, 系统

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(s) = y_0 \end{cases} \tag{1.1.27}$$

存在解 $y(t) \in B_{r_1}(x^*)$, $t \in [s, s+r_2]$, $s \in [t_0, b)$, $y_0 \in B_{r_2}(x^*)$. 进一步, 系统 (1.1.27) 所有解 $y(t) \in B_{r_1}(x^*)$, $t \in [s, s+r_2]$, $s \in [t_0, b)$.

取 n_0 使得 $(t_{n_0}, x(t_{n_0})) \in B_{r_2}(b, x^*)$. 由于 $(t_{n_0}, x(t_{n_0}))$ 是正则点, $x(t)$ 是系统 (1.1.27) 过 $(s, y_0) = (t_{n_0}, x(t_{n_0}))$ 的解. 由 r_2 的选择可知 $(t, x(t)) \in B_{r_1}(b, x^*)$, $\forall t \in [t_{n_0}, r_2]$, 即 $b \leqslant r_2$. 因此, 该解还可以向右延展. 此与饱和解相矛盾.

下面讨论若 (b,x^*) 是非正则点, 也就是, 存在 $k \geqslant 1$ 使得 $b = \tau_k(x^*)$. 令 $x^+ = x^* + \tau_k(x^*)$.

在条件 (1) 下, 存在 $r_1 > 0$ 使得对所有的 $(t,x) \in B_{r_1}(b,x^*)$ 有 $t \neq \tau_k(x)$. 利用 $\tau_j(x)$ 的性质知, 存在 $r_2 < r_1$ 使得对所有 $(t,x) \in B_{r_2}(b,x^*)$ 有 $t \neq \tau_j(x)$. 利用相同的讨论可知, $\lim\limits_{t \to b^-} x(t) = x^*$, 从而 $x(t)$ 可以延展出去, 矛盾.

在条件 (2) 下, 则 $b \neq \tau_j(x^+)$, $\forall j \geqslant 1$. 易证存在 $r_1 > 0$ 使得对 $\forall (t,x) \in B_{r_1}(b,x^+)$ 有 $t \neq \tau_j(x)$, $\forall j \geqslant 1$. 与前面类似, 存在 $0 < r_2 < r_1$ 使得 (1.1.27) 的解 $y(t) \in B_{r_1}(b,x^+)$, $t_0 \leqslant s \leqslant b$, $y_0 \in B_{r_2}(x^+)$. 由于 $I_k(x)$, $\tau_j(x)$ 连续及 $b = \tau(x^*)$, 存在 $0 < r_3 < r_2$ 使得 $x + I_k(x) \in B_{r_2}(x^+)$, $x \in B_{r_3}(x^*)$, $t \neq \tau_j(x)$, $\forall (t,x) \in B_{r_3}(b,x^*)$, $j \neq k$. 与前面类似, 存在 $0 < r_4 < r_3$ 使得过 $(s,y_0) \in [t_0,b) \times B_{r_4}(x^*)$ 的解 $y(t)$ 都有 $y(t) \in B_{r_3}(x^*)$, $t \in [s, s+r_4]$. 现在, 固定 n_0 使得

$$(t_{n_0}, x(t_{n_0})) \in B_{r_4}(b, x^*).$$

我们有两种情况:

(a) $(t, x(t))$ 不是正则点, $x(t) \in B_{r_3}(x^*)$, $t \geqslant t_{n_0}$;

(b) $(t^*, x(t^*))$ 是正则点, $x(t^*) \in B_{r_3}(x^*)$, $t_{n_0} \leqslant t^* < b$.

在 (a) 的情况下, 相同的讨论可以得到 $x(t) \in B_{r_3}(x^*)$, $\forall t_{n_0} \leqslant t < b$ 及 $\lim\limits_{t \to b^-} x(t) = x^*$, 矛盾.

在 (b) 的情况下, $x(t)$ 满足 $t^* = \tau_k(x(t^*))$ 且

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t^{*+}) = y_0, \end{cases} \tag{1.1.28}$$

$\forall t \in (t^*, t^* + \delta)$($\delta$ 由定义 1.1.3 定义), 这里 $y_0 = x(t^*) + I_k(x(t^*))$. 由于 $x(t^*) \in B_{r_3}(x^*)$, 知 $y_0 \in B_{r_2}(x^+)$. 由于当 $(t, x(t)) \in B_{r_1}(b, x^+)$, $(t, x(t))$ 是正则点, 同样的讨论可得 $x(t) \in B_{r_1}(x^+)$, $(t, x(t))$ 是正则点, $\forall t \in [t^*, b)$. 因此, $\lim\limits_{t\to b^-} x(t) = y \in B_{r_1}(x^+)$, 矛盾.

最后, 若 (3) 成立, 则对某一 $j \geqslant 1$, 有 $b = \tau_j(x^+)$. 取 $r_1 > 0$ 使得 $t \neq \tau_i(x)$, $\dfrac{d\tau_j(x)}{dx} \cdot f(t, x) \neq 1$, $\forall (t, x) \in B_{r_1}(b, x^+)$, $i \neq j$. 取 $0 < r_2 < r_1$ 使得过 $(s, y_0) \in [t_0, b) \times B_{r_2}(x^+)$ 的解 $y(t) \in B_{r_1}(x^+)$, $\forall t \in [s, s + r_2]$. 由于 $b = \tau_k(x^*)$, τ_i, I_i 连续, 存在 $r_2 > r_3 > 0$ 使得当 $(t, x) \in B_{r_3}(b, x^*)$ 有

$$(t, x + I_k(x)) \in B_{r_2}(b, x^+), \qquad t \neq \tau_i(x), \quad \forall i \neq k.$$

取 $0 < r_4 < r_3$ 使得过 $(s, y_0) \in [t_0, b) \times B_{r_4}(x^*)$ 的解 $y(t) \in B_{r_3}(x^*)$, $\forall t \in [s, s + r_4]$. 现在对于过 $(t_{n_0}, x(t_{n_0})) \in B_{r_4}(b, x^*)$ 的解 $x(t)$, 有下面两种情况:

(c) $(t, x(t))$ 没有非正则点, $\forall x(t) \in B_{r_3}(x^*)$, $t_{n_0} \leqslant t < b$;

(d) $(t^*, x(t^*))$ 是非正则点, $x(t^*) \in B_{r_3}(x^*)$, $t_{n_0} \leqslant t^* < b$.

在情况 (c) 下, 相同的讨论可知 $x(t) \in B_{r_3}(x^*)$, $(t, x(t))$ 是正则的, $\forall t_{n_0} \leqslant t < b$. 所以 $\lim\limits_{t\to b^-} x(t) = x^*$, 矛盾.

在情况 (d) 下, 由于对 $i \neq k$ 时, $t^* \neq \tau_i(x(t^*))$, 所以 $t^* = \tau_k(x(t^*))$, 并且对 $y_0 = x(t^*) + I_k(x(t^*))$, $i \neq j$, 由于 $y_0 \in B_{r_2}(x^+)$ 知 $t^* = \tau_j(y_0)$. 因此由条件 (3) 知 $t^* = \tau_j(y_0)$. 进一步, 对足够小的 $\delta > 0$, $x(t)$ 满足 (1.1.28), $t \in (t^*, t^* + \delta)$. 令 $s \in (t^*, b)$ 使得当 $t \in (t^*, s)$ 时, $(t, x(t))$ 是正则点, 但是 $(s, x(s))$ 是非正则点, 显然我们对 $t \in [t^*, s]$ 有 $(t, x(t)) \in B_{r_1}(b, x^+)$, $s = \tau_j(x(s))$.

现在, 令 $\sigma(t) = t - \tau_j(x(t))$, 可知

$$\sigma'(t) = 1 - \frac{d\tau_j(x(t))}{dx} f(t, x(t)) \neq 0, \qquad \forall t \in [t^*, s],$$

此与 $\sigma(t^*+) = \sigma(s)$ 矛盾. 因此, $(t, x(t)) \in B_{r_1}(b, x^+)$ 且没有非正则点, $t \in [t^*, b)$. 从而, $\lim\limits_{t\to b^-} x(t) = y \in B_{r_1}(x^+)$, 矛盾. □

下面我们讨论 (1.1.24) 的特殊情况:

$$\begin{cases} x' = f(t, x), & t \neq \tau(x), \\ \Delta x\big|_{t=\tau(x)} = I(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.1.29}$$

这里 $f: R \times R \to R$, $I: R \to R$.

我们有下面的定理.

定理 1.1.11 若 $f(t,x)$ 在 R^2 上连续, $\dfrac{d\tau(x)}{dx}$ 连续且

$$\frac{d\tau(x)}{dx}f(t,x)<1, \tag{1.1.30}$$

则

(a) 若 $\tau(x_0)\leqslant t_0$, (1.1.29) 的解在最大存在区间 $[t_0,\beta)$ 上存在, 使得

(1) $\tau(x(t_0))\leqslant t_0$,

(2) $\tau(x(t))<t,\ t\in(t_0,\beta)$,

(3) 当 $t\to\beta^-$ 时, $x(t)$ 逼近 B_1, 这里 B_1 是 $E_1-S=\{(t,x):\tau(x)>t\}-\{(t,x):\tau(x)=t\}$ 的边界.

(b) 若 $\tau(x_0)>t_0$, (1.1.29) 的解在最大存在区间 $[t_0,\beta)$ 上存在, 使得

(1) $\tau(x(t))>t$,

要么

(2) $\tau(x(\beta))=\beta$,

要么

(3) 当 $t\to\beta^-$ 时, $x(t)$ 逼近 B_1, 这里 B_1 是 $E_1=\{(t,x):\tau(x)>t\}$ 的边界.

证明 对于给定的 $(t_0,x_0)\in R^2$, 取 $a>0,b>0$. 令

$$R_0=\{(t,x)\in R^2\big|t_0\leqslant t<t_0+a,|x-x_0|\leqslant b\}.$$

设 $M=\max\limits_{(t,x)\in R_0}|f(t,x)|,\alpha=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}$. 令 $x_0(t)$ 是 $[t_0-\delta,t_0]$ 上的连续可微函数, $\delta>0$ 使得 $x_0(t_0)=x_0$, $|x'(t)|\leqslant M$, $|x_0(t)-x_0|\leqslant b$. 对于 $0<\varepsilon\leqslant\delta$, 定义

$$x_\varepsilon(t)=x_0+\int_{t_0}^t f(s,x_\varepsilon(s-\varepsilon))ds,\qquad t\in[t_0,\alpha_1],\alpha_1=\min\{\varepsilon,\alpha\}. \tag{1.1.31}$$

易知对每一充分小的 ε, (1.1.31) 的解 $x_\varepsilon(t)$ 是在 $[t_0,t_0+\alpha_1]$ 上存在, 且 $\{x_\varepsilon(t)\}$ 一致有界, 同等连续.

(a) 由 $\dfrac{d\tau(x)}{dx}$, $f(t,x)$ 连续, 知 $\dfrac{d\tau(x)}{dx}f(t,x)$ 连续. 由 (1.1.30), $F(t,x)=\dfrac{d\tau(x)}{dx}f(t,x)$ $\leqslant k<1$, $(t,x)\leqslant R_0$. 令 $1-k>\eta$. 对给定的 $\eta>0$, 存在 $\mu>0$ 使得: 若 $|x-y|<\mu$, $|x-y'|<\mu$, 一定有

$$\left.\frac{d\tau(x)}{dx}\right|_{x=y}f(t,y')<k+\eta<1.$$

由 $\{x_\varepsilon(t)\}$ 的同等连续性, 存在 ε_0 使得当 $|t-t'|<\varepsilon_0$, $t,t'\in[t_0-\delta,t_0+\delta]$ 时, 有

$$|x_\varepsilon(t)-x_\varepsilon(t')|<\mu.$$

令 $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, 则 $x_\varepsilon(t-\varepsilon) = x_\varepsilon(t) + \underline{\varepsilon}$, 这里 $|\underline{\varepsilon}| < \mu$. 所以

$$f(t, x_\varepsilon(t-\varepsilon)) = f(t, x_\varepsilon(t) + \underline{\varepsilon}). \tag{1.1.32}$$

由 (1.1.30), (1.1.31) 和 (1.1.32), 可知

$$\frac{d\tau(x_\varepsilon(t))}{dx} x'_\varepsilon(t) = \frac{d\tau(x_\varepsilon(t))}{dx} f(t, x_\varepsilon(t) + \underline{\varepsilon}). \tag{1.1.33}$$

考虑函数

$$\rho(t) = \rho_\varepsilon(t) = t - \tau(x_\varepsilon(t)), \qquad t \in [t_0, t_0 + \alpha_1].$$

由 (1.1.33), $\rho'(t) > 0$, 故 $\rho(t)$ 是增函数. 由于 $\rho(t_0) = t_0 - \tau(x_\varepsilon(t_0)) \geqslant 0$, $t > \tau(x_\varepsilon(t))$, $t \in (t_0, t_0 + \alpha_1]$, 所以在 $[t_0, t_0 + \alpha_1]$ 不会碰到 S. 取相应的收敛子列 $\{x_{\varepsilon_n}\}$ 收敛到 $x(t)$. $\rho(t)$ 也相应的替换，可知

$$\tau(x(t)) < t, \qquad t \in (t_0, t_0 + \alpha_1].$$

用一般的延拓定理可将该解延拓成饱和解， $t \in [t_0, \beta)$. 得到 (a).

下面我们讨论 (b).

要么

(1) 对 $\{\varepsilon_n\} \to 0$, $\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1}$, 在某时刻 t_n, $0 < t_n \leqslant t_0 + \alpha$, 有 $\tau(x_{\varepsilon_n}(t_n)) = t_n$, $\tau(x_{\varepsilon_n}(t)) > t$, $t \in [t_0, t_n)$;

要么

(2) 存在如上的 $\{\varepsilon_n\}$. $\tau(x_{\varepsilon_n}(t)) > t$, $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$, 而 $\{x_{\varepsilon_n}(t)\}$ 的极限 $x(t)$ 满足

$$\tau(x(t)) > t, \qquad t_0 \leqslant t < t_0 + \alpha, \qquad \tau(x(t_0 + \alpha)) = t_0 + \alpha.$$

要么

(3) (1), (2) 均不成立.

在 (1) 中，取单增或单减的序列 $\{t_n\}$, $t_n = t_{\varepsilon_n}$ 收敛到 s_0, $t_0 \leqslant s_0 \leqslant t_0 + \alpha$. 取 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{1,k}\}$ 在 $[t_0, t_1]$ 上收敛到 $v_1(t)$. 依次类推，取 $\{x_{j,k}\}$ 的收敛子列 $\{x_{j+1,k}\}$ 在 $[t_0, t_j]$ 上一致收敛于 $\vartheta_j(t)$. 可见

$$\vartheta_k(t) = \vartheta_j(t), \qquad t \in [t_0, t_j], k \geqslant j.$$

从而对充分小的 $\eta > 0$, $\{x_{n,n}(t)\}$ 一致收敛到系统的解 $x(t)$, $t \in [t_0, t_0 + \eta]$. 显然, $x(t)$ 在 $[t_0, s_0]$ 上有定义，且 $\tau(x(s_0)) = s_0$, 则一定有 $\tau(x(t)) > t$, $t \in [t_0, s_0)$. 事实上，若存在 $t' \in (t_0, s_0)$ 使得 $\tau(x(t')) = t'$. 由上面的构造， $\tau(x(t)) < t$, $t \in (t', s_0)$. 取 t'', $t' < t'' < s_0$, 则 $\tau(x(t'')) < t''$. 所以， $\{x_{n,n}(t)\}$ 在 $[t_0, t'']$ 上一致收敛. 再由 [9] 中引理 2.1, $t'' < t_n, n \geqslant n_0$, 且存在无限个 $t_0 < t_n < t''$ 满足 $\tau(x_{n,n}(t_n)) = t_n$, 矛盾. 因此， $x(t)$ 是该系统满足 (b) 中 (1) 和 (2) 的解. 其他的证明省略. □

3. 解对初值的连续依赖性及可微性

我们先考虑固定时刻系统 (1.1.1) 的情况. 我们一直假设对任意 $(t_0, x_0) \in R^2$, 系统 (1.1.1) 具有唯一解 $x(t; t_0, x_0)$.

我们将考虑系统 (1.1.1) 的解 $x(t; t_0, x_0)$ 关于 (t_0, x_0) 的连续性, $t \in J = (t_0, t_0 + a]$. 首先, 我们考虑辅助 IVP

$$\begin{cases} u' = f(t, u), & t \geqslant t_0, \\ u(t_0) = x_0, & t_0 \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.1.34}$$

$u(t; t_0, x_0)$ 表示该系统的解.

定理 1.1.12 系统 (1.1.1) 的解 $x(t; t_0, x_0)$ 关于 $(t; t_0, x_0)$, $t \neq t_k (k = 0, 1, 2, \cdots)$ 是连续的.

证明 设 $x(t; t_0, x_0)$ 的右行饱和存在区间为 (t_0, β), 对任意的 $(t; t_0, x_0)$, $t \neq t_k (t_k \in (t_0, \beta))$, 取适当的 $[a, b] \subseteq (t_0, \beta)$ 使得 $t \in (a, b)$. 不失一般性, 我们假设 $t \in [a, b] \subseteq (t_0, t_1]$. 由引理 1.1.6 知, 若 (t_0', x') 与 (t_0, x_0) 充分靠近, 则 $x(t; t_0', x')$ 在 $[a, b]$ 上存在, 且 $x(t; t_0', x')$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $x(t; t_0, x_0)$. 从而对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta' > 0$ 使得当 $|t_0' - t_0| < \delta'$, $|x' - x_0| < \delta'$ 时, 在 $[a, b]$ 上一定有

$$|x(t; t_0, x_0) - x(t; t_0', x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又由于在 $t = t'$ 点, $x(t; t_0, x_0)$ 连续, 存在 $\delta'' > 0$ 使得当 $|t - t'| < \delta''$ 时有

$$|x(t'; t_0, x_0) - x(t; t_0, x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, 当 $|t - t'| < \delta$, $|t_0 - t_0'| < \delta$, $|x_0 - x_0'| < \delta$ 时有

$$|x(t; t_0, x_0) - x(t'; t_0', x_0')| < \varepsilon,$$

这就证明了 $x(t', t_0', x_0')$ 是连续的. □

下面我们将考虑可微性.

定理 1.1.13 若 $f_x(t, x)$ 连续, $I_k'(x)$ 连续, 则系统 (1.1.1) 的解 $x(t; t_0, x_0)$ 关于 $(t; t_0, x_0)$ 是连续可微的, 其中 $t \neq t_k (k = 1, 2, \cdots)$.

证明 对于解 $x(t; t_0, x_0)$, 当 $t \neq t_k$ 时, $\dfrac{\partial x(t; t_0, x_0)}{\partial t} = f(t, x(t; t_0, x_0))$ 在 $(t; t_0, x_0)$ 是连续的, $t \neq t_k$. 为了证明 $\dfrac{\partial x(t; t_0, x_0)}{\partial x_0}$ 存在且连续, $t \neq t_k$, 我们考虑

$$\frac{x(t; t_0, x_0 + \Delta x) - x(t; t_0, x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0 + \Delta x + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s, t_0, x_0 + \Delta x))ds - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s, t_0, x_0))ds\right)}{\Delta x}$$

$$= 1 + \int_{t_0}^{t} \frac{f(s, x(s, t_0, x_0 + \Delta x)) - f(s, x(s, t_0, x_0))}{\Delta x} ds.$$

利用与 [11] 中相同的方法，我们可以看到 $\dfrac{x(t;t_0,x_0+\Delta x)-x(t;t_0,x_0)}{\Delta x}$ 的极限存在且是系统

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = f_x(t, x(t;t_0,x_0))z, & t \neq t_k, \\ \Delta z\big|_{t=t_k} = I_k'(x(t_k))z, \\ z(t_0^+) = 1 \end{cases}$$

的解. 因而，$\dfrac{\partial x(t;t_0,x_0)}{\partial x_0}$ 在 $(t;t_0,x_0)$ 是连续的，$t \neq t_k$.

利用相似的证明，可知 $\dfrac{\partial x(t;t_0,x_0)}{\partial t_0}$ 在 $(t;t_0,x_0)$ 是连续的，$t \neq t_k$. 从而 $x(t;t_0,x_0)$ 在 $(t;t_0,x_0)$ 是连续可微的，$t \neq t_k$. □

下面我们考虑变时刻脉冲微分系统的连续依赖性.

我们对过去的连续依赖性的定义改变一下 (见 [3]).

定义 1.1.4　设 $x(t;t_0,x_0)$ 是系统 (1.1.24) 的解，且

(1) 当对所有的 $k \geqslant 1$, $t \neq \tau_k(x(t;t_0,x_0))$ 时，一定有 $\lim\limits_{(\zeta,\eta)\to(t_0,x_0)} x(t,\zeta,\eta) = x(t;t_0,x_0)$;

(2) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在闭集 $J_\varepsilon \subseteq J$ 和某一 $\delta > 0$ 使得 $m(J - J_\varepsilon) < \varepsilon$ 且 $|\zeta - t_0| + |\eta - x_0| < \delta$ 时，

$$|x(t,\zeta,\eta) - x(t;t_0,x_0)| < \varepsilon, \qquad t \in J_\varepsilon,$$

则称 $x(t;t_0,x_0)$ 连续依赖于 (t_0,x_0).

定理 1.1.14　假设

(1) $f \in C(J \times R, R)$, $I_k \in C(R,R)$, $\tau_k \in C^1(R,(0,+\infty))$ 且 $\forall x \in R$, 有 $\lim\limits_{y\to x}\sup\limits_{k} |\tau_k(y) - \tau_k(x)| = 0$;

(2) (1.1.34) 的解 $u(t;t_0,x_0)$ 关于 (t_0,x_0) 具有古典意义下的连续依赖性;

(3) 若对某一 $k \geqslant 1$, 有 $t = \tau_k(x)$, 则对所有 $j \geqslant 1$ 一定有 $t \neq \tau_j(x + I_k(x))$;

(4) $\tau_k'(x)f(t,x) \neq 1$, $\forall k \geqslant 1$,

则 (1.1.24) 的解 $x(t;t_0,x_0)$ 在定义 1.1.4 下连续依赖于 (t_0,x_0).

证明　由条件 (2) 可以得出 (1.1.24) 解的唯一性. 首先证明系统 (1.1.24) 的解. 若碰到脉冲面 $S_j (j \geqslant 1)$, 则至多有限次相碰. 若结论不真，则存在序列 $\{t_j\} \subseteq J$ 使

得

$$t_j = \tau_{n_j}(x(t_j)). \tag{1.1.35}$$

不失一般性，令 $\lim\limits_{j\to+\infty} t_j = t^*$，且要么 (a) $t_j > t^*$, $\forall j \geqslant 1$，要么 (b) $t_j < t^*$, $\forall j \geqslant 1$. 由定义 1.1.3, (a) 不可能出现. 若 (b) 出现，由于 $x(t)$ 左连续，我们有 $\lim\limits_{j\to+\infty} x(t_j) = x(t^*) = x^*$. 我们可以假设存在 $n \geqslant 1$ 使得

$$|t^* - \tau_n(x^*)| < \min_{i \neq n} |t^* - \tau_i(x^*)|, \tag{1.1.36}$$

则由 (1.1.35), (1.1.36) 和条件 (1) 知对足够大的 j 一定有 $n_j = n$. 因此 $t^* = \tau_n(x*)$, $I_n(x^*) = \lim\limits_{j\to+\infty} I_n(x(t_j)) = 0$. 可以推出 $t^* = \tau_n(x^* + I_n(x^*))$, 与条件 (3) 矛盾. 所以，我们可以假设 $x(t)$ 碰到 S_j 的次数为 p 次，碰撞时刻为 t_j, $j = 1, 2, \cdots, p$, 是 $x(t)$ 碰到 S_j 的时刻， $t_0 < t_1 < \cdots < t_p < t_0 + a$.

定义 $\sigma(t, h) = t - \tau_1(u(t; t_0, x_0 + h))$, h 足够小. 由条件 (2), 知

$$\sigma(t_1, 0) = t_1 - \tau_1(x(t_1, t_0, x_0)) = 0,$$

且 $\sigma(t, h)$ 关于 h 连续. 条件 (4) 表明 $\dfrac{\partial \sigma}{\partial t}\Big|_{t = t_1} \neq 0$. 因此由隐函数定理， $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $0 < \delta_2 < \delta_1 < \varepsilon$ 使得存在唯一的函数 $t : \beta_{\delta_2}(0) = \{y \in R \big| |y| \leqslant \delta_2\}$, 连续且具有如下性质：

$$t(0) = t_1, \sigma(t(h), h) \equiv 0, \qquad h \in \beta_{\delta_2}(0). \tag{1.1.37}$$

特别地，由 (1.1.36) 知 (1.1.24) 的解 $x(t; t_0, x_0 + h)$ 碰到 S_1, $t = t(h)$, $\forall h \in B_{\delta_2}(0)$, S_1 也正是 $x(t; t_0, x_0)$ 在 $t = t_1$ 所碰到的.

由于 I_1 是连续的， $t_1 \neq \tau_k(x(t_1) + I_1(x(t_1)))$, $k \geqslant 1$, 且 $\lim\limits_{h\to 0} t(h) = t_1$, 对任意给定的 $\delta > 0$ 都成立，我们可取 $0 < \varepsilon < \delta$ 和相应的 $0 < \delta_2 < \delta_1 < \varepsilon$ 使得对每一 $h \in \beta_{\delta_2}(0)$, 都有 $x(t; t_0, x_0)$ 和 $x(t; t_0, x_0 + h)$ 在 $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$ 碰到 S_1 仅一次. 更特殊地，设 $x(t; t_0, x_0)$ 在 $t = t_1$ 碰到 S_1, $x(t; t_0, x_0 + h)$ 在 $t = t(h)$ 碰到 S_1, $|t(h) - t_1| < \delta_1$. 从而

$$\begin{cases} |x(t_1 + \varepsilon, t_0, x_0) - x(t_1 + \varepsilon, t_0, x_0 + h)| < \delta, \\ |x(t; t_0, x_0) - x(t; t_0, x_0 + h)| < \delta, \qquad t \in [t_0, t_1 - \delta_1]. \end{cases} \tag{1.1.38}$$

由 (1.1.38) 及 δ 的任意性，我们可以在 $(t_2, \tau_2(x(t_2)))$ 上重复相同的步骤，对任意给定的 $\delta > 0$, 取充分小的 $0 < \varepsilon < \delta$ 和相应的 $0 < \delta_2 < \delta_1 < \varepsilon$ 使得对每一 $h \in \beta_{\delta_2}(0)$, $x(t; t_0, x_0 + h)$ 在 $[t_0, t_2 + \varepsilon]$ 上仅碰到 S_j 两次，也就是，在 t_1^* 碰到 S_1, 在 t_2^* 碰到 S_2, 这里 $|t_1^* - t_1| < \delta_1$, $|t_2^* - t_2| < \delta_1$. 从而

$$\begin{cases} |x(t_2 + \varepsilon, t_0, x_0) - x(t_2 + \varepsilon, t_0, x_0 + h)| < \delta, \\ |x(t; t_0, x_0) - x(t; t_0, x_0 + h)| < \delta, t \in J - J_2, \end{cases} \tag{1.1.39}$$

这里 $J_2 = (t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1) \cup (t_2 - \delta_1, t_2 + \delta_1)$.

这一过程可以重复下去，由于 $x(t; t_0, x_0)$ 有有限次跳跃，我们最终可取到 $\varepsilon > 0$ 满足 $0 < \varepsilon < \dfrac{\delta}{2p}$ 和相应的 $0 < \delta_2 < \delta_1 < \varepsilon$ 使得对 $h \in \beta_{\delta_2}(0)$, 有

$$|x(t; t_0, x_0) - x(t; t_0, x_0 + h)| < \delta, \qquad t \in J - J_0,$$

这里 $J_0 = \bigcup_{i=1}^{p} (t_i - \delta_2, t_i + \delta_2)$. 显然 $m(J_0) = 2p\delta_1 < 2p\varepsilon < \delta$, 故得 $x(t; t_0, x_0)$ 关于 x_0 的连续依赖性. 同样，可以证明 $x(t; t_0, x_0)$ 连续依赖于 t_0. 用 $\sigma^*(t, \lambda, h) = t - \tau_1(u(t; t_0 + \lambda, x_0 + h))$ 代替 $\sigma(t, h)$, 我们就可获得 $x(t; t_0, x_0)$ 关于 (t_0, x_0) 的连续依赖性. □

考虑初值问题 (1.1.24). 由于 (1.1.24) 的解在 $t = \tau_k(x(t; t_0, x_0))$ 不具有可微性，所以我们给出新的定义.

定义 1.1.5　设 $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ 是 (1.1.24) 的解. 若 $\dfrac{\partial x(t; t_0, x_0)}{\partial x_0}$ 和 $\dfrac{\partial x(t; t_0, x_0)}{\partial t_0}$ 存在，$t \neq \tau_k(x(t; t_0, x_0))$, $k = 1, 2, \cdots$, 则称 $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ 关于 (t_0, x_0) 是可微的.

由于 $\dfrac{\partial x(t; t_0, x_0)}{\partial x_0}$ 对于 $t = \tau_k(x(t))$ 无意义，我们定义 $\dfrac{\partial x(t; t_0, x_0)}{\partial x_0} = \lim\limits_{s \to t^-} \dfrac{\partial x(s, t_0, x_0)}{\partial x_0}$, $t = \tau_k(x(t))$, 也就是, $\dfrac{\partial x(t; t_0, x_0)}{\partial x_0} = \dfrac{\partial x(t^-; t_0, x_0)}{\partial x_0}$. $\dfrac{\partial x(t; t_0, x_0)}{\partial t_0}$ 同样可以定义.

定理 1.1.15　设

(1) $f \in C(J \times R, R)$, $f_x(t, x)$ 存在连续，这里 $J = [t_0, t_0 + a]$, $I_k \in C^1(R, R)$, $\tau_k \in C^1(R, (0, +\infty))$, $\lim\limits_{y \to x} \sup\limits_{k} |\tau_k(y) - \tau_k(x)| = 0$;

(2) 当 $t = \tau_k(x)$, $k \geqslant 1$ 时有 $t \neq \tau_j(x + I_k(x))$, $\forall j \geqslant 1$;

(3) $\dfrac{d\tau_k(x)}{dx} f(t, x) \neq 1$, $\forall k \geqslant 1$,

则系统 (1.1.24) 的解 $x(t; t_0, x_0)$ 关于 (t_0, x_0) 连续可微. 从而 $\varPhi(t; t_0, x_0) = \dfrac{\partial x(t; t_0, x_0)}{\partial x_0}$ 是系统

$$\begin{cases} y' = f_x(t, x(t))y, & t \neq \tau_k(x(t)), \\ \Delta y|_{t = \tau_k(x(t))} = H(t, x(t))y, \\ y(t_0^+) = 1 \end{cases} \tag{1.1.40}$$

的解，这里

$$H(t, x(t)) = \frac{f(t, x(t)) - f(t, x(t^-))}{1 - \dfrac{d\tau_k(x(t))}{dx} f(t, x(t))} \cdot \frac{d\tau_k(x(t))}{dx}$$

$$+\frac{dI_k(x(t))}{dx}\left(\frac{f(t,x(t))\dfrac{d\tau_k(x(t))}{dx}}{1-\dfrac{d\tau_k(x(t))}{dx}f(t,x(t))}+1\right).$$

证明 我们分四步来证明.

第一步. 由假设 (1), (1.1.24) 的解 $x(t;t_0,x_0)$ 是唯一的且在古典意义下连续依赖于 (t_0,x_0), 对于任意的 (t_0,x_0), 由定理 1.1.14 可知 (1.1.24) 的解有限次碰到 S_k, 从而我们可以假设 $x(t)$ 在 $t=t_1,t_2,\cdots,t_p$ 分别碰到 S_{n_1}, S_{n_2}, $\cdots$, S_{n_p}, 这里 $t_0<t_1<\cdots<t_p<t_0+a$. 固定 $t\in[t_0,t_1)$, 则对足够小的 $|h|>0$, $x(t;t_0,t_0+h)$ 不会碰到任何的面, 因此 $x(t;t_0,x_0+h)=u(t;t_0,x_0+h)$, 即

$$\frac{\partial x(t)}{\partial x_0}=\frac{\partial u(t)}{\partial x_0}$$

存在. 下面证明对任意的 $t\in(t_1,t_2)$, $\dfrac{\partial x(t)}{\partial x_0}$ 存在.

第二步. 对固定的 i, 令 $h=h_0e_i$, 这里 $h_0\in R$, $\{e_i\}$ 是 R 中的标准基. 我们令 $x(t,h)=x(t;t_0,x_0+h)$, $x_h(t)=\dfrac{x(t;t_0,x_0+h)-x(t;t_0,x_0)}{h}$, 定义 $\sigma(t,h)=t-\tau_{n_1}(u(t;t_0,x_0+h))$. 可见

$$\sigma(t_1,0)=0,\qquad \left.\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right|_{t=t_1,h=0}=1-\frac{d\tau_{n_1}(dx(t_1))}{\partial x}f(t_1,x(t_1)),$$

$$\left.\frac{\partial\sigma}{\partial h}\right|_{t=t_1,h=0}=-\frac{d\tau_{n_1}}{dx}\frac{\partial x(t_1)}{\partial x_0}.$$

因此, 由隐含数定理可知存在 $0<\delta_1<\delta_2$ 及其上的唯一函数 $t:B_{\delta_2}(0)\to(t_1-\delta_1,t_1+\delta_1)$ 且连续可微, 所以对 $h\in B_{\delta_2}(0)$, $t(0)=t_1$, $\sigma(t(h),h)=0$, 且

$$\left.\frac{dt}{dh}\right|_{h=0}=\frac{\dfrac{d\tau_{n_1}(x(t_1))}{dx}\dfrac{\partial x(t_1)}{\partial x_0}}{1-\dfrac{\tau_{n_1}(x(t))}{\partial x}f(t,x(t))}\overset{\text{def.}}{=}\Omega.$$

第三步. 我们将证明 $g(h)=x(t_h,h)$ 在 $h=0$ 的可微性, 这里 $t_h=t(h)$. 为此, 我们分别讨论两种情况.

(a) $t(h)>t_1$. 在这种情况下, 我们有

$$\begin{aligned}g(h)-g(0)&=x(t_h,h)-x(t_1)\\&=(x(t_h;t_0,x_0+h)-x(t_1;t_0,x_0+h))+(x(t_1;t_0,x_0+h)-x(t_1;t_0,x_0)).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x(t_h,h)-x(t_1)}{h} \\ &= \frac{\partial x}{\partial t}\bigg|_{t=t_1}\frac{dt}{dh}\bigg|_{h=0}+\frac{\partial x}{\partial x_0}\bigg|_{t=t_1} \\ &= f(t_1,x(t_1))\varOmega+\frac{\partial x}{\partial x_0}\bigg|_{t=t_1}. \end{aligned}$$

(b) $h(t) < t_1$, 我们有

$$g(h)-g(0)=(x(t_h;t_0,x_0+h)-x(t_h;t_0,x_0))+(x(t_h;t_0,x_0)-x(t_1;t_0,x_0)),$$

这意味着

$$\begin{aligned} g'(0) &= \frac{\partial x}{\partial x_0}\bigg|_{t=t_1}+\frac{\partial x}{\partial t}\bigg|_{t=t_1}\frac{dt}{dh}\bigg|_{h=0} \\ &= f(t_1,x(t_1))\cdot\varOmega+\frac{\partial x}{\partial x_0}\bigg|_{t=t_1}. \end{aligned}$$

综合 (a) 和 (b), 可知 $g'(0)$ 存在且

$$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{x(t_h,h)-x(t_1)}{h}=f(t_1,x(t_1))\varOmega+\frac{\partial x}{\partial x_0}\bigg|_{t=t_1}.$$

第四步. 为了证明 $x(t)$ 当 $t\in(t_1,t_2)$ 时关于 x_0 的可微性，我们再分两步:

(a) $t_h < t_1$. 对 $t\in(t_1,t_2)$, 我们有

$$\begin{cases} x_h'(t)=\dfrac{1}{h}[f(t,x(t,h))-f(t,x(t))]=\displaystyle\int_0^1 f_x(t,sx(t,h)+(1-s)x(t))ds x_h(t), \\ x_h(t_1^+)=\dfrac{1}{h}[x(t_h,h)+I_{n_1}(x(t_h,h))+\displaystyle\int_{t_h}^{t_1} f(s,x(s,h))ds-x(t_1)-I_{n_1}(x(t_1))], \end{cases} \tag{1.1.41}$$

这里，由第三步可得

$$\lim_{h\to 0}x_h(t_1)=\left(1+\frac{dI_{n_1}}{dx}\right)\left[f(t_1,x(t_1))\cdot\varOmega+\frac{\partial x(t_1)}{\partial x_0}\right]-f(t_1,x(t_1^+))\varOmega,$$

且有对任给的 $[t_1,b]\in[t_1,t_2)$, $\lim\limits_{h\to 0}f_x(t,sx(t,h)+(1-s)x(t))=f_x(x,x(t))$ 一致成立. 所以 $\lim\limits_{h\to 0}x_h(t)=\varPhi(t,t_0,x_0)$ 存在且是

$$\begin{cases} y'=f_x(t,x(t))y, \\ y(t_1^+)=\left(I+\dfrac{dI_{n_1}}{dx}\right)\left[f(t_1,x(t_1))\varOmega+\dfrac{\partial x}{\partial x_0}(t_1)\right]-f(t_1,x(t_1^+))\varOmega \end{cases} \tag{1.1.42}$$

的解, $t \in (t_1, t_2)$.

(b) $t_h > t_1$. 对于 $t \in (t_h, t_2)$, 我们有

$$x_h'(t) = \int_0^1 f_x(t, sx(t,h) + (1-s)x(t))dsx_h(t),$$

$$x_h(t_h^+) = \frac{1}{h}\left[x(t_h, h) + I_{n_1}(x(t_h, h)) - x(t_1) - I_{n_1}(x(t_1)) - \int_{t_1}^{t_h} f(s, x(s))ds\right],$$

由第三步可知

$$\lim_{h\to 0} x_h(t_h^+) = \left[f(t_1, x(t_1))\Omega + \left.\frac{\partial x}{\partial x_0}\right|_{t=t_1}\right] - f(t_1, x(t_1^+))\Omega.$$

所以和前面的讨论一样, 知 $\lim\limits_{h\to 0} x_h(t) = \Phi^*(t; t_0, x_0)$ 存在且是 (1.1.42) 的解. 由于 (1.1.42) 的解是唯一的, 可知 $\Phi^*(t; t_0, x_0) = \Phi(t; t_0, x_0) = \dfrac{\partial x}{\partial x_0}(t; t_0, x_0)$. 最后, (1.1.42) 表明在 $t = t_1$,

$$\Delta\Phi = \frac{\partial x(t_1^+)}{\partial x_0} - \frac{\partial x(t_1)}{\partial x_0} = [f(t_1, x(t_1)) - f(t_1, x(t_1^+))]\Omega + \frac{dI_{n_1}}{dx}\left[f(t_1, x(t_1))\Omega + \frac{\partial x}{\partial x_0}\right],$$

且 (1.1.40) 的第二式满足. 依次类推, 在 (t_i, t_{i+1}) 上我们有同样的结论. □

§1.2 脉冲泛函微分系统基本理论

1. 具有有限时滞的脉冲微分系统的局部解和整体解

本节我们讨论脉冲时滞微分系统 (IRFDE). 一般来说, 我们考虑

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t), x(t-\tau_1), x_t), & t \neq t_k, \\ \Delta x|_{t=t_k} = I_k(x(t_k)), & k = 1, 2, \cdots, \\ x(t_0^+) = \omega, \\ x_{t_0} = \Phi, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

其中 $\Phi \in PC([-\tau, 0], R) = \{x, x$ 是由 $[-\tau, 0]$ 到 R 的映射; $x(t^-) = x(t), t \in (-\tau, 0]; x(t^+)$ 存在, $t \in [-\tau, 0)$; 对 $t \in (-\tau, 0]$ 除有限个点外有 $x(t^+) = x(t)\}$, $L^1([-\tau, 0], R) = \{x$ 是由 $[-\tau, 0]$ 到 R 的可测函数且 $\int_{-\tau}^0 |x(t)|dt < +\infty\}$. 在这里我们假设 $f \in C(R \times R \times R \times L^1([-\tau, 0], R), R)$, $I_k \in C(R, R) (k = 1, 2, \cdots)$. 系统 (1.2.1) 的解表示为 $x(t; t_0, \omega, \Phi)$.

为简单起见我们考虑

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t), x(t-\tau_1), x_t), & t \neq t_k, \\ \Delta x|_{t=t_k} = I_k(x(t_k)), & k = 1, 2, \cdots, \\ x(0^+) = \omega, \\ x_0 = \Phi, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

其中 $\Phi \in PC([-\tau, 0], R)$, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < +\infty$, $J = (0, +\infty)$, $J' = J - \{t_i\}_{i=1}^{+\infty}$, 其解表示为 $x(t, 0, \omega, \Phi)$.

首先我们考虑系统

$$\begin{cases} x' = f(t, x_t), \\ x_0 = \Phi, \end{cases} \tag{1.2.3}$$

其中 $\Phi \in C([-\tau, 0], R) = \{x, x$ 是由 $[-\tau, 0]$ 到 R 的连续函数 $\}$.

引理 1.2.1(见 [6])　设 $f \in C(R \times C([-\tau, 0], R), R)$, 且满足 Lipschitz 条件, 则存在 $\delta > 0$ 使得系统 (1.2.3) 在 $[0, \delta]$ 上存在唯一解 $x(t, 0, \Phi)$ 满足 $x_0 = \Phi$.

引理 1.2.2(见 [6])　设 $f \in C(R \times C([-\tau, 0], R), R)$, 则存在 $\delta > 0$ 使得系统 (1.2.3) 在 $[0, \delta]$ 上至少存在解 $x(t, 0, \Phi)$ 满足 $x_0 = \Phi$.

引理 1.2.3(见 [6])　设 $f \in C(R \times C([-\tau, 0], R), R)$, 则系统 (1.2.3) 存在饱和解 $x(t, 0, \Phi)$ 满足 $x_0 = \Phi$, $t \in [0, \beta)$.

引理 1.2.4(见 [6])　若 $f \in C^p(R \times C([-\tau, 0], R), R)$, $p \geqslant 1$, 则系统 (1.2.3) 的解 $x(t, t_0, \Phi)$ 是连续可微的.

引理 1.2.5　若 $f \in C(R \times R \times R \times L^1([-\tau, 0], R, R)$, 则 $x \in PC([-\tau, +\infty), R)$ 是系统 (1.2.2) 满足 $x_0 = \Phi$, $x(0^+) = \omega$ 的解当且仅当 $x \in PC([-\tau, +\infty), R) \cap C^1(J', R)$ 是以下系统

$$x(t) = \omega + \int_0^t f(s, x(s), x(s-\tau_1), x_s) ds + \sum_{0 < t_k < t} I_k(x(t_k)), \qquad t \in (0, +\infty) \tag{1.2.4}$$

的解, 其中, 当 $t + s \leqslant 0$ 时 $x_t(s) = x(t+s) = \Phi(t+s)$.

证明　对任意的 $x \in PC([-\tau, +\infty), R)$ 和 $x_t(s) = x(t+s), s \in [-\tau, 0]$, $t \geqslant 0$, 其中当 $t + s \leqslant 0$ 时 $x(t+s) = \Phi(t+s)$. 对任意的 $t_0 \in (0, +\infty)$, 有

$$\lim_{t \to t_0} x_t(s) = x_{t_0}(s), \qquad \text{a.e.} \ \ s \in [-\tau, 0],$$

则

$$\lim_{t \to t_0} \| x_t - x_{t_0} \|_1 = \lim_{t \to t_0} \int_{-\tau}^0 \| x(t+s) - x(t_0+s) \| ds = 0.$$

所以对任意的 $x \in PC((0, +\infty), R)$, $f(t, x(t), x(t-\tau_1), x_t)$ 在 $J = (0, +\infty)$ 上除可数个点外连续, 则 $f(t, x(t), x(t-\tau_1), x_t)$ 在任意的有界区间上 Lebesgue 可积.

若 $x \in PC(J,R) \cap C^1(J',R)$ 是系统 (1.2.4) 的解，其显然满足 (1.2.2) 的第二和第三式，且在 J 上除有限个点外有 $x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), x_t)$.

反之，若 $x \in PC(J,R)$ 是系统 (1.2.2) 的解，则对 $t \in (0, t_1]$, $x(t)$ 在 $(0, t_1]$ 上是一致连续的，而且

$$x(t) = \omega + \int_0^t f(s, x(s), x(s-\tau_1), x_s)ds, \qquad t \in (0, t_1].$$

又因 $x(t_1^+) = x(t_1) + I_1(x(t_1))$ 且 $x(t)$ 在 $(t_1, t_2]$ 上一致连续，

$$x(t) = x(t_1) + I_1(x(t_1)) + \int_{t_1}^t f(s, x(s), x(s-\tau_1), x_s)ds, \qquad t \in (t_1, t_2].$$

类似有

$$x(t) = x(t_{n-1}) + I_{n-1}(x(t_{n-1})) + \int_{t_{n-1}}^t f(s, x(s), x(s-\tau_1), x_s)ds, \qquad t \in (t_{n-1}, t_n],$$

$$n = 1, 2, \cdots,$$

则 $x \in PC([-\tau, +\infty), R) \cap C^1(J', R)$ 是系统 (1.2.4) 的解. □

对 $x \in PC(J,R)$, 定义

$$(Ax)(t) = \omega + \int_0^t f(s, x(s), x(s-\tau_1), x_s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(x(t_k)), \qquad t \in (0, +\infty),$$

这里 $x_t(s) = x(s+t) = \Phi(s+t)$, $s + t \leqslant 0$; $x(t-\tau_1) = \Phi(t-\tau_1)$, $t - \tau_1 \leqslant 0$.

下面我们列出条件：

(H_1) 对任意的 $R > 0$, $M(R) = \sup\limits_{t\in(0,+\infty),|x|\leqslant R,|y|\leqslant R,\|\phi\|\leqslant R} |f(t,x,y,\phi)| < +\infty$;

(H_2) 存在 $M > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ 和 $P_k(s) \geqslant 0 (k \geqslant 1)$ 使得

$$|f(t,x,y,\phi)| \leqslant M + b|x| + c|y| + d\|\phi\|, \qquad \forall (t,x,y,\phi) \in R \times R \times R \times L^1([-\tau, 0], R).$$

$$|I_k(x)| \leqslant P_k(|x|), \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

现在我们再来看另一个引理.

引理 1.2.6 设条件 (H_1) 成立，则算子 $A: PC(J,R) \to PC(J,R)$ 是全连续算子.

证明 由 (H_1) 易知对任意有界的 $D \subseteq PC(J,R)$, $A(D)$ 是有界的. 现在令 $\{x_n\} \subseteq PC(J,R), x_0 \in PC(J,R)$ 且 $x_n \to x_0, n \to +\infty$. 若当 $n \to +\infty$ 时 $d(Ax_n, Ax_0)$ 不趋于零，则存在 $\varepsilon_0 > 0, k_0 > 0$ 和 $\{n_j\} \subseteq \{n\}$ 使得

$$\| Ax_{n_j} - Ax_0 \|_{k_0} \geqslant \varepsilon_0, \qquad j = 1, 2, 3, \cdots. \tag{1.2.5}$$

因为 $d(x_{n_j},x_0)\to 0, j\to +\infty$, 我们有

$$\| x_{n_j}-x_0 \|_{k_0}\to 0, \qquad j\to +\infty.$$

所以对任意的 $s\geqslant 0$,

$$\| x_{n_{j_s}}-x_{0_s} \|_1=\int_{-\tau}^{0} \| x_{n_j}(s+r)-x_0(s+r) \| dr\leqslant \tau \| x_{n_j}-x_0 \|_{k_0}\to 0, \qquad j\to +\infty.$$

因为 $I_k\in C(R,R), f\in C(J\times R\times R\times L^1([-\tau,0],R)$, 且 $\| f(t,x,y,\psi) \|\leqslant M+b\| x \|+c\| y \|+d\| \psi \|_1$, 由 Lebesgue 控制收敛定理，我们有

$$\| I_k(x_{n_j}(t_k))-I_k(x_0(t_k)) \|\to 0, \qquad k=1,2,\cdots,k_0-1, j\to +\infty,$$

且

$$\int_0^{t_{k_0}} \| f(s,x_{n_j}(s),x_{n_j}(s-\tau_1),x_{n_{j_s}})-f(s,x_0(s),x_0(s-\tau_1),x_{n_{0_s}}) \| ds\to 0, \qquad j\to +\infty,$$

这与 (1.2.5) 矛盾. 所以 A 是连续的.

$\forall T>0$, 对有界的 $D\subseteq PC((0,T],R)$, 若 $x\in D$ 且 $s_1>s_2\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\| (Ax)(s_1)-(Ax)(s_2) \|\leqslant & \int_{s_2}^{s_1}(M+b\| x(s) \|+c\| x(s-\tau_1) \|+d\tau\| x_s \|_{pc})ds\\ &+\sum_{s_2\leqslant t_k\leqslant s_1} I_k(x(t_k)),\end{aligned}$$

则对任意的 $\varepsilon>0$, 我们可以取一个 $\delta>0$ 使得

$$\| (Ax)(s_1)-(Ax)(s_2) \|<\varepsilon,$$

其中 $x\in D$ 且 $|s_1-s_2|<\delta, s_1,s_2\in(0,t_1]$, i.e. $(AD)(t)$ 在 $(0,t_1]$ 上同等连续. 类似地可以证明 $(AD)(t)$ 在 $(0,T]$ 上逐段同等连续. 而 AD 显然有界，即 AD 是相对紧的. ← 由 T 的任意性知， $A:PC(J,R)\to PC(J,R)$ 是全连续算子. □

定理 1.2.1　设 $f\in C(R\times R\times R\times L^1([-\tau,0],R),R)$, 且条件 (H_1) 成立，则存在 $\delta>0$ 使得系统 (1.2.2) 在 $(0,\delta]$ 上至少存在一个解 $x(t;0,\omega,\varPhi)$ 满足 $x_0=\varPhi$, $x(0^+)=\omega$.

证明　由引理 1.2.5 知，$f(t,x(t),x(t-\tau_1),x_t)$ 是可测的. 取 $R>\max\{\|\varPhi\|,|\omega|\}$. 取 $\delta>0$ 使得 $|\omega|+\delta M(R)<R$. 取 $\varOmega=\{x\in C([0,\delta],R)|\|x\|\leqslant R\}$. 定义

$$(Ax)(t)=\omega+\int_0^t f(s,x(s),x(s-\tau_1),x_s)ds, \qquad x\in\varOmega.$$

由引理 1.2.6 的证明，易知 A 是全连续算子，且对任意 $x\in\Omega$,

$$\|Ax\|=\max_{t\in[0,\delta]}|\omega+\int_0^t f(s,x(s),x(s-\tau_1),x_s)ds|<R,$$

所以， $A(\Omega)\subseteq\Omega$.

由 Schauder 不动点定理， A 在 Ω 中至少有一个不动点 x^*. 定义

$$y(t)=\begin{cases}\Phi(t), & t\in[-\tau,0],\\ x^*(t), & t\in(0,\delta],\end{cases}$$

则 $y(t)$ 是系统 (1.2.2) 的一个解. □

定理 1.2.2 设定理 1.2.1 的条件成立, 则系统 (1.2.2) 存在饱和解 $x(t,0,\omega,\Phi)$. 设饱和存在区间 $[-\tau,\beta)$, 若 $\beta<+\infty$, 则 $\overline{\lim}_{t\to\beta^-}|x(t)|=+\infty$.

证明 其证明与引理 1.2.3 一样. 不妨设 $\beta\in(t_k,t_{k+1}]$, 则在 (t_k,β) 上满足

$$x(t)=x(t_k^+)+\int_{t_k}^t f(s,x(s),x(s-\tau_1),x_s)ds,\qquad t\in(t_k,\beta).$$

反证法，设 $\overline{\lim}_{t\to\beta^-}|x(t)|<+\infty$, 则存在 $R'>0$ 使得 $\|x_t\|\leqslant R'$, $t\in(t_k,\beta)$. 对任意的 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M(R')}$, 则当 $0<\beta-t<\delta$, $0<\beta-t'<\delta$ 时，有

$$|x(t)-x(t')|=\left|\int_{t'}^t f(s,x(s),x(s-\tau_1),x_s)ds\right|\leqslant M(R')\delta<\varepsilon.$$

所以， $\lim\limits_{t\to\beta^-}x(t)$ 存在有限. 因此该解可以延拓，与饱和性相矛盾. □

现在我们考虑

$$z(t)=|\omega|+Mt+(b+c+d\tau)\int_0^t z(s)ds+\sum_{0<t_k<t}P_k(z(t_k)),\qquad t\in[0,+\infty),\quad(1.2.6)$$

可得以下引理.

引理 1.2.7 系统 (1.2.6) 有非减的非负解.

证明 对 $t\in[0,t_1]$, (1.2.6) 可写为

$$z(t)=|\omega|+Mt+(b+c+d\tau)\int_0^t z(s)ds.\qquad(1.2.7)$$

显然存在一个 $z_1\in C([0,t_1],R^+)$ 满足 (1.2.7).

当 $t\in[t_1,t_2]$, 我们来考虑系统

$$z(t)=z_1(t_1)+P_1(z_1(t_1))+Mt+(b+c+d\tau)\int_{t_1}^t z(s)ds.\qquad(1.2.8)$$

显然存在一个 $z_2 \in C([t_1,t_2],R^+)$ 满足 (1.2.8). 继续下去，当 $t \in [t_{n-1},t_n]$, 我们来考虑

$$z(t) = z_{n-1}(t_{n-1}) + P_{n-1}(z_{n-1}(t_{n-1})) + Mt + (b+c+d\tau)\int_{t_{n-1}}^{t} z(s)ds. \qquad (1.2.9)$$

显然存在一个 $z_n \in C([t_{n-1},t_n],R^+)$ 满足 (1.2.9). 继续以上的证明并且令

$$z(t) = \begin{cases} z_1(t), & t \in [0,t_1], \\ z_2(t), & t \in (t_1,t_2], \\ \vdots & \vdots \\ z_n(t), & t \in (t_{n-1},t_n], \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

则 $z \in PC(J,R^+)$ 满足 (1.2.6), 且 $z(t)$ 非减连续. □

定理 1.2.3 当 $(\mathrm{H}_1),(\mathrm{H}_2)$ 成立时，(1.2.2) 在 $PC(J,R)$ 上至少有一个解.

证明 由引理 1.2.6, $A: PC(J,R) \to PC(J,R)$ 是全连续算子. 由引理 1.2.7, 存在一个 $z \in PC(J,R^+)$ 使得 z 满足 (1.2.6). 令 $B = \{x \in PC(J,R), |x(t)| \leqslant z(t), t \in J\}$, 则 $B \subseteq PC(J,R)$ 是有界凸闭集.

对任意的 $x \in B, s \in (0,+\infty)$, 当 $s \in [0,\tau)$ 时，有

$$\begin{aligned} \| x_s \|_{pc} &= \sup_{r\in[-\tau,0]} \| x(s+r) \| \\ &= \max\left\{ \sup_{r\in[-\tau,-s]} \| x(s+r) \|, \sup_{r\in[-s,0]} \| x(s+r) \| \right\} \\ &\leqslant \max\left\{ \| \Phi \|_{pc}, \sup_{r\in[-s,0]} z(s+r) \right\} \\ &= \max\{\| \Phi \|_{pc}, z(s)\} \\ &= z(s); \end{aligned}$$

当 $s \geqslant \tau$, 则

$$\| x_s \|_{pc} = \sup_{r\in[-\tau,0]} \| x(s+r) \| \leqslant \sup_{r\in[-\tau,0]} z(s+r) = z(s).$$

因此，对 $x \in B, t \in (0,+\infty)$, 我们有

$$\begin{aligned} |(Ax)(t)| \leqslant{} & |\omega| + Mt + b\int_0^t |x(s)|ds + c\int_0^t |x(s-\tau_1)|ds \\ & + d\int_0^t \| x_s \|_1 \, ds + \sum_{0<t_k<t} |I_k(x(t_k))| \end{aligned}$$

$$\leqslant |\omega| + Mt + (b + c + d\tau)\int_0^t z(s)ds + \sum_{0<t_k<t} P_k(z(t_k))$$
$$= z(s).$$

所以 $AB \subseteq B$.

由 Tychonoff 不动点定理, A 至少有一个点 $x^* \in PC(J, R)$, 当 $t + s \leqslant 0$ 时有 $x_t^*(s) = x^*(t+s) = \Phi(t+s)$. 所以, $x^*(t)$ 是系统 (1.2.2) 的整体解. □

定理 1.2.4 假设 $f \in C(J\times R\times R\times L^1([-\tau,0],R),R)$ 且存在 $a,b,c \in C(J,R^+)$ 使得对任意的 $x,y,w,z, \in R, \phi,\psi \in L^1([-\tau,0],R)$, 有

$$|f(t,x,w,\phi) - f(t,y,z,\psi)| \leqslant a(t)|x-y| + b(t)|w-z| + c(t)\|\phi-\psi\|_1,$$

则 (1.2.2) 有唯一解 $x^* \in PC(J,R)$ 且 $x_0^* = \Phi$.

证明 对 $x \in C([0,t_1],R)$, 令

$$\| x \| = \max\{e^{-M_1 t}\max\{\| x(s) \|, s \in [0,t]\}, t \in [0,t_1]\},$$

其中 $N_1 = \max\{a(t)+b(t)+c(t)\tau, t \in [0,t_1]\}$ 且 $M_1 = N_1 + 1$. 现在对 $x \in C([0,t_1],R)$, 令

$$(A_1 x)(t) = \omega + \int_0^t f(s,x(s),x(s-\tau_1),x_s)ds,$$

其中当 $s + r \leqslant 0$ 时有 $x_s(r) = x(s+r) = \Phi(s+r)$, 则对任意的 $x,y \in C([0,t_1],R)$, 且当 $t \in [0,\tau]$ 时有

$$\begin{aligned}\| x_t - y_t \|_{pc} &= \sup_{s\in[-\tau,0]} |x(t+s) - y(t+s)| \\ &= \max\{|x(t+s)-y(t+s)|, s \in [-\tau,0]\} = \max\{|x(s)-y(s)|, s \in [0,t]\};\end{aligned}$$

当 $t \in [\tau, t_1]$ 时有

$$\begin{aligned}|(A_1x)(t) - (A_1y)(t)| &\leqslant \int_0^t |f(s,x(s),x(s-\tau_1),x_s) - f(s,y(s),y(s-\tau_1),y_s)|ds \\ &\leqslant \int_0^t (a(s)|x(s)-y(s)| + b(s)|x(s-\tau_1) \\ &\quad -y(s-\tau_1)| + c(s) \| x_s - y_s \|_1)ds \\ &\leqslant \int_0^t (a(s)+b(s)+c(s)\tau)\max\{|x(r)-y(r)|, r \in [0,s]\}ds \\ &= \int_0^t (a(s)+b(s)+c(s)\tau)e^{M_1 s}e^{-M_1 s}\max\{|x(r)-y(r)|, r \in [0,s]\}ds \\ &\leqslant \int_0^t (a(s)+b(s)+c(s)\tau)e^{M_1 s}ds\|x-y\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \int_0^t N_1 e^{M_1 s} ds \parallel x-y \parallel \\ &< \frac{N_1}{M_1} e^{M_1 t} \parallel x-y \parallel .\end{aligned}$$

因为 $e^{M_1 t}$ 增,

$$\max\{|(A_1x)(s)-(A_1y)(s)|, s\in[0,t]\}\leqslant \frac{N_1}{M_1}e^{M_1 t}\parallel x-y\parallel,$$

则

$$e^{-M_1 t}\max\{|(A_1x)(s)-(A_1y)(s)|, s\in[0,t]\}\leqslant \frac{N_1}{M_1}\parallel x-y\parallel .$$

所以

$$\max\{e^{-M_1 t}\max\{|(A_1x)(s)-(A_1y)(s)|, s\in[0,t]\}, t\in[0,t_1]\}\leqslant \frac{N_1}{M_1}\parallel x-y\parallel,$$

即

$$\parallel A_1x-A_1y\parallel\leqslant \frac{N_1}{M_1}\parallel x-y\parallel .$$

因此 A_1 有唯一不动点 $x_1^*\in C([0,t_1],R)$. 对 $x\in C([t_1,t_2],R)$, 令

$$\parallel x\parallel=\max\{e^{-M_2(t-t_1)}\max\{|x(s)|, s\in[t_1,t]\}, t\in[t_1,t_2]\},$$

其中 $N_2=\max\{a(t)+b(t)+c(t)\tau, t\in[t_1,t_2]\}$ 且 $M_2=N_2+1$. 现在对 $x\in C([t_1,t_2],R)$, 令

$$(A_2x)(t)=x_1^*(t_1)+I_1(x_1^*(t_1))+\int_{t_1}^t f(s,x(s),x(t-\tau_1),x_s)ds,$$

其中当 $s+r\leqslant 0$ 时有 $x_s(r)=x(s+r)=\Phi(s+r)$, 当 $0<s+r\leqslant t_1$ 时有 $x_s(r)=x(s+r)=x_1^*(s+r)$. 类似的我们可以证明 A_2 有唯一的不动点 $x_2^*\in C([t_1,t_2],R)$. 继续下去，对 $x\in C([t_n,t_{n+1}],R)$, 令

$$\parallel x\parallel=\max\{e^{-M_{n+1}(t-t_n)}\max\{|x(s)|, s\in[t_n,t]\}, t\in[t_n',t_{n+1}]\},$$

其中 $N_{n+1}=\max\{a(t)+b(t)+c(t)\tau, t\in[t_n,t_{n+1}]\}$ 且 $M_{n+1}=N_{n+1}+1$. 现在对 $x\in C([t_n,t_{n+1}],R)$, 令

$$(A_{n+1}x)(t)=x_n^*(t_n)+I_n(x_n^*(t_n))+\int_{t_n}^t f(s,x(s),x(t-\tau_1),x_s)ds,$$

其中当 $s+r\leqslant 0$ 时有 $x_s(r)=x(s+r)=\Phi(s+r)$, 当 $s+r\in(0,t_1]$ 时有 $x_s(r)=x(s+r)=x^*(s+r),\cdots$, 当 $s+r\in(t_{n-1},t_n]$ 时有 $x_s(r)=x(s+r)=x_n^*(s+r)$. 类似的我们可以证明 A_n 有唯一的不动点 $x_{n+1}^*\in C([t_n,t_{n+1}],R)$. 继续下去，令

$$x^*(t)=\begin{cases}\Phi(t), & t\in[-\tau,0],\\ x_1^*(t), & t\in(0,t_1],\\ x_2^*(t), & t\in(t_1,t_2],\\ \vdots & \vdots\\ x_{n+1}^*(t), & t\in(t_n,t_{n+1}],\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

则 $x^*(t)$ 是 (1.2.2) 的一个整体解. 如果 y^* 是系统 (1.2.2) 的另一个解, 由 $x_0^*=y_0^*, y^*|_{[0,t_1]}$ 是 A_1 的一个不动点, 所以 $x^*|_{[0,t_1]}=y^*|_{[0,t_1]}$. 继续下去, 有 $x^*|_{[t_n,t_{n+1}]}=y^*|_{[t_n,t_{n+1}]}, n=1,2,\cdots$, 即 $x^*=y^*$. □

下面我们讨论 (1.2.2) 的特殊形式

$$\begin{cases}x'=f(t,x_t), & t\neq t_k,\\ \Delta x|_{t=t_k}=I_k(x(t_k)), & k=1,2,\cdots,\\ x(0^+)=\omega,\\ x_0=\Phi,\end{cases}\tag{1.2.10}$$

其中 $\Phi\in PC([-\tau,0],R)=\{x,x$ 是由 $[\tau,0]$ 到 R 的映射; $x(t^-)=x(t),t\in(-\tau,0];x(t^+)$ 存在, $t\in[-\tau,0)$; 对 $t\in(-\tau,0]$ 除有限个点外有 $x(t^+)=x(t)\}\subseteq L^1([-\tau,0],R)$, $0<t_1<t_2<\cdots<t_m<+\infty$, $J=(0,+\infty)$, $J'=J-\{t_i\}_{i=1}^{+\infty}$, 其解表示为 $x(t,0,\omega,\Phi)$. $B:L^1([-\tau,0],R)\to R$ 是一有界线性泛函, 满足存在 $\gamma(t)$ 是 $[-\tau,0]$ 上的有界可测函数使得对任意 $\psi\in L^1([-\tau,0],R)$ 有

$$B\psi=\int_{-\tau}^0\gamma(s)\psi(s)ds.$$

我们先证明下面的引理.

引理 1.2.8(比较结果) 假设 $p\in PC([-\tau,T],R)\cap C^1(J',R)$ 且满足

$$\begin{cases}p'\leqslant -Mp(t)-Bp_t, & t\in(0,T],t\neq t_k,\\ \Delta p|_{t=t_k}\leqslant -L_kp(t_k), & k=1,2,\cdots,m,\end{cases}\tag{1.2.11}$$

其中常数 $M\geqslant 0, 0\leqslant L_k<1(k=1,2,\cdots,m)$ 且 $M_0=\int_{-\tau}^0 e^{-Mt}\gamma(t)dt$.

再假设或者

(a) $p(0^+) \leqslant p_0(s) \leqslant 0, s \in [-\tau, 0]$ 且

$$M_0\Delta_1 \leqslant \frac{\prod_{k=1}^{m}(1-L_k)}{1+\sum_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{j}(1-L_k)}, \tag{1.2.12}$$

其中 $\Delta_1 = \max\{t_1, t_2 - t_1, \cdots, T - t_m\}$; 或者

(b) $p(0^+) \geqslant -\gamma$, $p_0 \in PC([-\tau,0],R) \cap C^1(I',R)$, 其中 $I' = [-\tau,0] - \{t_l\}_{l=-r}^{-1}$, $\{t_l\}_{l=-r}^{-1}$ 是 $PC([-\tau,0],R)$ 中不连续点的集合， $p'(t) \leqslant M_0\lambda$,

$$p(t_{-i}^+) - p(t_{-i}) \leqslant -L_{-i}p(t_{-i}), \tag{1.2.13}$$

$\inf\limits_{s\in[-\tau,0]} p(s) = -\lambda < 0$ 且

$$M_0\Delta_2 \leqslant \frac{\prod_{k=-r}^{m}(1-L_k)}{1+\sum_{j=-r}^{m}\prod_{k=j}^{m}(1-L_k)}, \tag{1.2.14}$$

其中 $\Delta_2 = \max\{t_{-r}+\tau, t_{-r+1}-t_r, \cdots, -t_{-1}, t_1, t_2-t_1, \cdots, T-t_m\}$. 则 $p(t) \leqslant 0$, a.e. $t \in (0,T]$.

证明　令 $v(t) = e^{Mt}u(t), t \in [-\tau, 0]$. 由 B 的定义 (1.2.11) 可以写为

$$\begin{cases} v'(t) \leqslant -\displaystyle\int_{t-r}^{t} e^{M(t-s)}v(s)\gamma(s-t)ds, & t \in J, t \neq t_k, \\ \Delta\ v|_{t=t_k} \leqslant -L_k v(t_k), & k = 1, 2, \cdots, m. \end{cases} \tag{1.2.15}$$

现在我们证明 $v(t) \leqslant 0, t \in [-\tau, T]$.

事实上, 如果存在一个 $t^* > 0$ 使 $v(t^*) > 0$, 我们可以假设 $t^* \neq t_1, t_2, \cdots, t_m$ (否则我们可以找到一个 $\bar{t}$ 与 t^* 充分接近且使 $v(\bar{t}) > 0$), 令

$$\inf_{-r\leqslant t\leqslant t^*} v(t) = -b. \tag{1.2.16}$$

我们先来考虑情况 (a).

(A)　若 $b = 0$, 则 $v(t) \geqslant 0, t \in [0, t^*]$. 从而 $v'(t) \leqslant 0, t \in [0, t^*]$. 所以 $v'(t^*) \leqslant 0$. 矛盾.

(B)　若 $b > 0$. 假设 $t^* \in (t_i, t_{i+1}]$, 显然存在一个 $0 \leqslant t_* < t^*$ 使 $v(t_*) = -b$, 其中 t_* 位于某个 $J_j (j \leqslant i)$ 或 $v(t_j^+) = -b$. 我们可以假设 $v(t_*) = -b$(当 $v(t_j^+) = -b$

时，证明类似). 由中值定理可得

$$\begin{cases} v(t^*) - v(t_i^+) = v'(\zeta_i)(t^* - t_i), & t_i < \zeta_i < t^*, \\ v(t_i) - v(t_{i-1}^+) = v'(\zeta_{i-1})(t_i - t_{i-1}), & t_{i-1} < \zeta_{i-1} < t_i, \\ \qquad \vdots & \qquad \vdots \\ v(t_{j+2}) - v(t_{j+1}^+) = v'(\zeta_{j+1})(t_{j+2} - t_{j+1}), & t_{j+1} < \zeta_{j+1} < t_{j+2}, \\ v(t_{j+1}) - v(t_*) = v'(\zeta_*)(t_{j+1} - t_*), & t_* < \zeta_* < t_{j+1}. \end{cases}$$

另一方面，对 $t \in (0, t^*]$,

$$v'(t) \leqslant -\int_{t-r}^{t} e^{M(t-s)} v(s)\gamma(s-t)ds \leqslant bM_0. \tag{1.2.17}$$

由 (1.2.11) 有

$$v(t_k^+) \leqslant (1 - L_k)v(t_k), \qquad k = 1, 2, \cdots, m,$$

且

$$\begin{cases} v(t^*) - (1 - L_i)v(t_i) \leqslant bM_0\Delta_1, \\ v(t_i) - (1 - L_{i-1})v(t_{i-1}) \leqslant bM_0\Delta_1, \\ \qquad \vdots \\ v(t_{j+2}) - (1 - L_{j+1})v(t_{j+1}) \leqslant bM_0\Delta_1, \\ v(t_{j+1}) + b \leqslant bM_0\Delta_1, \end{cases} \tag{1.2.18}$$

这说明了

$$0 < v(t^*) \leqslant -b \prod_{k=j+1}^{i} (1 - L_k) + bM_0\Delta_1 \left\{ 1 + \sum_{l=j+1}^{i} \prod_{k=l}^{i} (1 - L_k) \right\},$$

而且

$$M_0\Delta_1 > \frac{\displaystyle\prod_{k=j+1}^{i} (1 - L_k)}{1 + \displaystyle\sum_{l=j+1}^{i} \prod_{k=l}^{i} (1 - L_k)} \geqslant \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{m} (1 - L_k)}{1 + \displaystyle\sum_{l=1}^{m} \prod_{k=1}^{m} (1 - L_k)},$$

这与 (1.2.12) 矛盾.

由 (A), (B), $v(t) \leqslant 0, t \in J$.

我们再来考虑情况 (b).

(A′) 若 $-b = \inf\limits_{t\in[0,t^*]} v(t)$, 类似于 (a) 我们可以得矛盾.

(B′) 若 $-b < \inf\limits_{t\in[0,t^*]} v(t)$, 则 $b = \lambda$ 并且存在一个 $t_* \in (t_{-j-1}, t_{-j}]$ 使得 $v(t_*) = -b$(或者 $v(t_{-j-1}^+) = -b$, 证明类似). 所以

$$\begin{cases} v(t^*) - v(t_i^+) = v'(\zeta_i)(t^* - t_i), & t_i < \zeta_i < t^*, \\ v(t_i) - v(t_{i-1}^+) = v'(\zeta_{i-1})(t_i - t_{i-1}), & t_{i-1} < \zeta_{i-1} < t_i, \\ \qquad\vdots & \qquad\vdots \\ v(t_1) - v(t_{-1}^+) = v'(\zeta_{-1})(t_1 - t_{-1}), & t_{-1} < \zeta_{-1} < t_1, \\ v(t_{-1}) - v(t_{-2}^+) = v'(\zeta_{-2})(t_{-1} - t_{-2}), & t_{-2} < \zeta_{-2} < t_{-1}, \\ \qquad\vdots & \qquad\vdots \\ v(t_{-j+1}) - v(t_{-j}^+) = v'(\zeta_{-j})(t_{-j+1} - t_{-j}), & t_{-j} < \zeta_{-j} < t_{-j+1}, \\ v(t_{-j}) - v(t_*) = v'(\zeta_*)(t_{-j} - t_*), & t_* < \zeta_* < t_{-j}. \end{cases} \tag{1.2.19}$$

由 (1.2.13),(1.2.18), 有

$$\begin{cases} v(t^*) - (1 - L_i)v(t_i) \leqslant bM_0\Delta_2, \\ v(t_i) - (1 - L_{i-1})v(t_{i-1}) \leqslant bM_0\Delta_2, \\ \qquad\vdots \\ v(t_1) - (1 - L_{-1})v(t_{-1}) \leqslant bM_0\Delta_2, \\ v(t_{-1}) - (1 - L_{-2})v(t_{-2}^+) \leqslant bM_0\Delta_2, \\ \qquad\vdots \\ v(t_{-j+1}) - (1 - L_{-j})v(t_{-j}) \leqslant bM_0\Delta_2, \\ v(t_{-j}) + b \leqslant bM_0\Delta_2, \end{cases}$$

这说明了

$$\begin{aligned} 0 &< v(t^*) \\ &\leqslant -b \prod_{k=-j}^{i} (1 - L_k) + bM_0\Delta_2 \left\{ 1 + \sum_{l=-j}^{i} \prod_{k=l}^{i} (1 - L_k) \right\}. \end{aligned}$$

类似的有

$$M_0\Delta_2 > \frac{\prod\limits_{k=-j}^{i} (1 - L_k)}{1 + \sum\limits_{l=-j}^{i} \prod\limits_{k=l}^{i} (1 - L_k)}$$

$$\geqslant \frac{\prod_{k=-r}^{m}(1-L_k)}{1+\sum_{l=-r}^{m}\prod_{k=l}^{m}(1-L_k)},$$

这与 (1.2.14) 矛盾.

由 (A′), (B′), $v(t)\leqslant 0$, a.e. $t\in(0,T]$. □

引理 1.2.9 令 $\sigma,\eta\in M([-\tau,T],R)$, 则 $x\in PC([-\tau,T],R)$ 是系统

$$\begin{cases} x'+Mx+Bx_t=\sigma(t), & t\in J, t\neq t_k, \\ \Delta x|_{t=t_k}=I_k(\eta_k)-L_k[x(t_k)-\eta(t_k)], & k=1,2,\cdots,m, \\ x(0^+)=\omega, \\ x_0=\Phi \end{cases} \tag{1.2.20}$$

的解当且仅当 $x\in PC_0([-\tau,T],R)$ 是以下积分系统

$$\begin{aligned} x(t)=\omega e^{-Mt}&+\int_0^t e^{-M(t-s)}[\sigma(s)-Bx_s]ds \\ &+\sum_{0<t_k<t}e^{-M(t-t_k)}\{I_k(\eta(t_k))-L_k[x(t_k)-\eta(t_k)]\}, \qquad t\in(0,T], \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

其中 $x_t(s)=x(t+s)=\Phi(t+s)$, $t+s\leqslant 0$.

证明 假设 $x\in PC([-\tau,T],R)$ 是 IRFDE(1.2.20) 的解. 令 $z(t)=x(t)e^{-Mt}$, 则 $z\in PC([-\tau,T],R)$ 且

$$z'(t)=[\sigma(t)-Bx_t]e^{-Mt}, \qquad t\in(0,T], t\neq t_k, k=1,2,\cdots,m.$$

因为 $(\sigma(t)-Bx_t)e^{-Mt}$ 在 $(0,T]$ 上可测, 易知

$$z(t)=z(0^+)+\int_0^t z'(s)ds+\sum_{0<t_k<t}[z(t_k^+)-z(t_k)], \qquad t\in(0,T].$$

由 (1.2.20) 的第二式有

$$z(t_k^+)-z(t_k)=\{I_k(\eta(t_k))-L_k[x(t_k)-\eta(t_k)]\}e^{Mt_k}.$$

随之,

$$\begin{aligned} x(t)e^{Mt}&=\omega+\int_0^t[\sigma(t)-Bx_s]ds \\ &=\sum_{0<t_k<t}\{I_k(\eta(t_k))-L_k[x(t_k)-\eta(t_k)]\}e^{Mt_k}, \qquad t\in[0,T], \end{aligned}$$

即 $x(t)$ 满足 (1.2.21).

我们可以看出，如果 $x \in PC([-\tau, T])$ 是 (1.2.21) 的解，易知在 $t \in [0, T] - \{t_k\}_{k=1}^{m}$ 上除去 Lebesgue 测度为零的集合外均满足 (1.2.20) 的第一式，并且 (1.2.20) 的第二式和第三式也是正确的. □

引理 1.2.10　系统 (1.2.20) 有唯一解属于 $PC([-\tau, T], R)$ 且 $x_0 = \Phi$, $x(0^+) = \omega$.

证明　对 $x \in C([0, t_1], R)$, 令 $\| x \| = \max\{e^{-M_1 t}|x(t)|, t \in [0, t_1]\}$ 且

$$(A_1 x)(t) = \omega e^{-Mt} + \int_0^t e^{-M(t-s)}[\sigma(s) - (Bx_s)]ds, \qquad t \in (0, T],$$

其中，若 $t + s \leqslant 0$ 则 $x(t+s) = \Phi(t+s)$ 且 $M_1 = \| B \| + 1$. 显然 $A_1 : C([0, t_1], R]) \to C([0, t_1], R)$ 是连续映射. 对 $x, y \in C([0, t_1], R)$,

$$\begin{aligned}
|(A_1 x)(t) - (A_1 y)(t)| &= \int_0^t [(Bx_s) - (By_s)]ds \\
&= \int_0^t \int_{-\tau}^0 |x_s(r) - y_s(r)|\gamma(r)drds \\
&= \int_{-\tau}^0 \int_0^t |x_s(r) - y_s(r)|\gamma(r)dsdr \\
&= \int_{-\tau}^0 \int_0^t |x_s(r) - y_s(r)|ds\gamma(r)dr \\
&= \int_{-\tau}^0 \int_0^{t+r} |x(s) - y(s)|ds\gamma(r)dr \\
&\leqslant \int_{-\tau}^0 \int_0^{t+r} |x(s) - y(s)|ds\gamma(r)dr \\
&= \int_0^t |x(s) - y(s)|ds \int_{-\tau}^0 \gamma(r)dr \\
&= \| B \| \int_0^t e^{M_1 s} e^{-M_1 s} \| x(s) - y(s) \| \\
&\leqslant \frac{\| B \|}{M_1} \| x - y \| .
\end{aligned}$$

所以

$$e^{-M_1 t}|(A_1 x)(t) - (A_1 y)(t)| \leqslant \frac{\| B \|}{M_1} \| x - y \|, \qquad \text{i.e.}$$

$$\| A_1 x - A_1 y \| \leqslant \frac{\| B \|}{M_1} \| x - y \| . \tag{1.2.22}$$

由连续映射理论， A_1 有唯一的不动点 $x_1 \in C([0, t_1], R)$. 对 $x \in C([t_1, t_2], R)$, 令

$\| x \| = \max\{e^{-M_2(t-t_1)}|x(t)|, t \in [t_1, t_2]\}$, 且

$$(A_2x)(t) = (x_1(t_1)) + [I_1(\eta(t_1)) - L_1(x_1(t_1) - \eta(t_1))]e^{-M(t-t_1)} + \int_{t_1}^{t} e^{-M(t-s)}[\sigma(s) - Bx_s]ds, \qquad t \in [t_1, t_2], \tag{1.2.23}$$

其中, 如果 $t+s \leqslant 0$, 则 $x(t+s) = \Phi(t+s)$; 如果 $t+s \in (0, t_1]$, 则 $x(t+s) = x_1(t+s)$ 且 $M_2 = \| B \| + 1$. 类似地, A_2 在 $C([t_1, t_2], R)$ 上有唯一的不动点 x_2. 继续下去, 对 $x \in C([t_n, T], R)$, 令 $\| x \| = \max\{e^{-M_{n+1}t}|x(t)|, t \in [t_n, T]\}$, 且

$$(A_{n+1}x)(t) = (x_n(t_n)) + [I_n(\eta(t_n)) - L_n(x_n(t_n) - \eta(t_n))]e^{-M(t-t_n)} + \int_{t_n}^{t} e^{-M(t-s)}[\sigma(s) - Bx_s]ds, \qquad t \in [t_n, T], \tag{1.2.24}$$

其中, 如果 $t+s \leqslant 0$, 则 $x(t+s) = \Phi(t+s)$; 如果 $t+s \in (0, t_1]$, 则 $x(t+s) = x_1(t+s), \cdots$; 如果 $t+s \in (t_{n-2}, t_n]$, 则 $x(t+s) = x_{n-1}(t+s)$ 且 $M_{n+1} = \| B \| + 1$.

同样 A_{n+1} 有唯一的不动点 $x_{n+1} \in C([t_n, T], R)$. 令

$$x^*(t) = \begin{cases} \Phi(t), & t \in [-\tau, 0], \\ x_1(t), & t \in (0, t_1], \\ x_2(t), & t \in (t_1, t_2], \\ \vdots & \vdots \\ x_{n+1}(t), & t \in (t_n, T], \end{cases}$$

则 $x^* \in PC([-\tau, T], R)$ 是一个解. 如果 $y^* \in PC([-\tau, T], R)$ 是系统的另一个解, 由 $x^*(t) = y^*(t), t \in [-\tau, 0]$, 易得 $x^*(t) = y^*(t), t \in [0, t_1]$. 同样 $x^*(t) = y^*(t), t \in (t_1, t_2]$. 继续下去, 有 $x^*(t) = y^*(t), t \in (t_n, T]$. 所以 $x^* = y^*$. □

为方便起见我们列出几个独立的条件.

(A_1) 存在 $u, v \in PC([-\tau, T], R)$ 满足 $u(t) \leqslant v(t) (t \in J)$ 且

$$\begin{cases} u'(t) \leqslant f(t, u_t), & t \in J, t \neq t_k, \\ \Delta\, u|_{t=t_k} \leqslant I_k(u_{t_k}), & k = 1, 2, \cdots, m, \\ u(0^+) \leqslant \bar{u}, \\ u_0 \leqslant \Phi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'(t) \geqslant f(t, v_t), & t \in J, t \neq t_k, \\ \Delta\, v|_{t=t_k} \geqslant I_k(v_{t_k}), & k = 1, 2, \cdots, m, \\ v(0^+) \geqslant \bar{v}, \\ v_0 \geqslant \Phi, \end{cases}$$

并且, $\Phi - u_0$ 与 $v_0 - \Phi$ 满足引理 1.2.8 中的条件 (a) 或 (b).

(A_2) 存在常数 $M \geqslant 0$ 使得

$$f(t,\phi) - f(t,\psi) \geqslant -M(\phi(0) - \psi(0)) - B(\phi - \psi),$$

其中 $t \in J, \phi, \psi \in \{x_t, u(t) \leqslant x(t) \leqslant v(t), t \in J\}$ 且 $\phi \geqslant \psi$.

(A_3) 存在常数 $0 \leqslant L_k < 1 (k = 1, 2, \cdots, m)$ 使得

$$I_k(x) - I_k(y) \geqslant -L_k(x - y),$$

其中 $u(t_k) \leqslant y \leqslant x \leqslant v(t_k)(k = 1, 2, \cdots, m)$.

(A_4) $f : J \times L^1([-\tau, 0], R) \to R$ 连续.

定理 1.2.5　设条件 $(A_1) \sim (A_4)$ 都成立且 $f \in C([0,T]) \times L^1([-\tau,0],R)$, $[u,v] \subseteq PC([-\tau,0],R)$. 则存在单调序列 $\{u_n\}, \{v_n\} \subseteq PC([-\tau,T],R)$ 在 $(0,T]$ 上分别收敛于位于 $[u,v]$ 上的最大与最小解 x^*, $x_* \in PC([-\tau,T],R)$. 若 $x \in PC([-\tau,T],R)$ 是满足 $x \in [u,v]$ 的任意解, 则

$$u(t) \leqslant u_1(t) \leqslant \cdots \leqslant x_*(t) \leqslant x(t) \leqslant x^*(t) \leqslant \cdots \leqslant v_1(t) \leqslant v(t), \qquad t \in (0,T].$$

证明　对任意的 $\eta \in [u,v]$, 考虑线性系统 (1.2.20), 其中

$$\sigma(t) = f(t,\eta_t) + M\eta(t) + B\eta_t, \qquad t \in J.$$

由条件 (A_4) 和引理 1.2.5, 可知 $\sigma \in M([-\tau,T],R)$. 由引理 1.2.9, IRFDE(1.2.20) 有唯一解 $x \in PC([-\tau,T],R)$ 且 $x_0 = \Phi$. 令

$$x(t) = (A\eta)(t), \qquad t \in (0,T], \tag{1.2.25}$$

则 A 是由 $[u,v]$ 到 $PC([-\tau,T],R)$ 的连续映射. 下面我们来证明

(a)　$u \leqslant Au, Av \leqslant v$;

(b)　A 在 $[u,v]$ 上非减.

先证 (a). 我们令 $u_1 = Au, p = u - u_1$. 由引理 1.2.5, 我们可知

$$\begin{cases} u_1'(t) + Mu_1(t) + Bu_{1t} = f(t,u_t) + Mu(t) + Bu_t, & t \in J, t \neq t_k, \\ \Delta\ u_1|_{t=t_k} = I_k(u(t_k)) - L_k[u_1(t_k) - u(t_k)], & k = 1, 2, \cdots, m, \\ u_{10} = \Phi, \end{cases} \tag{1.2.26}$$

所以

$$\begin{cases} p'(t) = u'(t) - u_1' \leqslant -Mp(t) - Bp_t, & t \in J, t \neq t_k, \\ \Delta\ p|_{t=t_k} = \Delta\ u|_{t=t_k} - \Delta\ u_1|_{t=t_k} \leqslant -L_k p(t_k), & k = 1, 2, \cdots, m, \\ p_0 = u_0 - u_{10} \leqslant 0. \end{cases} \tag{1.2.27}$$

由引理 1.2.8 可知 $p(t)\leqslant 0, t\in J$,i.e., $u\leqslant u_1=Au$. 类似可证 $v_1=Av\leqslant v$.

再证 (b), 对 $\eta_1,\eta_2\in[u,v]$ 且 $\eta_1\leqslant\eta_2$, 令 $p=x_1-x_2$, 其中 $x_1=A\eta_1, x_2=A\eta_2$. 由引理 1.2.8, 有

$$\begin{aligned}
p' &= x_1'-x_2'\\
&=[f(t,\eta_{1t})+M(\eta_1(t)-x_1(t))+(B\eta_{1t}-Bx_{1t})]\\
&\quad -[f(t,\eta_{2t})+M(\eta_2(t)-x_2(t))+(B\eta_{2t}-Bx_{2t})]\\
&=-[f(t,\eta_{2t})-f(t,\eta_{1t})+M(\eta_2(t)-\eta_1(t))+(B\eta_{2t}-B\eta_{1t})]-Mp-Bp_t\\
&\leqslant p(t)-Bp_t, \qquad t\in J, t\neq t_k,
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
\Delta p|_{t=t_k} &= \Delta x_1|_{t=t_k}-\Delta x_2|_{t=t_k}\\
&=\{I_k(\eta_1(t_k))-L_k[x_1(t_k)-\eta_1(t_k)]\}-\{I_k(\eta_2(t_k)-L_k[x_2(t_k)-\eta_2(t_k)]\}\\
&=-\{I_k(\eta_2(t_k))-I_k(\eta_1(t_k))+L_k[\eta_2(t_k)-\eta_1(t_k)]\}-L_kp(t_k)\\
&\leqslant -L_kp(t_k), \qquad k=1,2,\cdots,m,
\end{aligned}$$

且

$$p_0=x_{10}-x_{20}=0.$$

因此，由引理 1.2.8, $p(t)\leqslant 0, t\in J$, i.e. $A\eta_1\leqslant A\eta_2$, 则 (b) 可证.

令 $u_n=Au_{n-1}$ 且 $v_n=Av_{n-1}(n=1,2,\cdots,m)$. 由 (a),(b) 有

$$u(t)\leqslant u_1(t)\leqslant\cdots\leqslant u_n\leqslant\cdots\leqslant v_n(t)\leqslant\cdots\leqslant v_1(t)\leqslant v(t), \qquad t\in J, \tag{1.2.28}$$

其中 $u_n,v_n\in PC([-\tau,T],R)$ 且 $u_{n0}=v_{n0}=\Phi, n=1,2,\cdots$. 所以存在 x_* 和 x^* 使得

$$u_n(t)\to x_*(t), \qquad t\in[-\tau,T], \quad n\to+\infty, \tag{1.2.29}$$

$$v_n(t)\to x^*(t), \qquad t\in[-\tau,T], \quad n\to+\infty. \tag{1.2.30}$$

所以

$$u_{nt}(s)\to x_{*t}(s), \qquad s\in[-\tau,0], \quad n\to+\infty,$$

$$v_{nt}(s)\to x_t^*(s), \qquad s\in[-\tau,0], \quad n\to+\infty.$$

因此

$$\begin{aligned}
&f(t,u_{nt})+Mu_{n-1}(t)-(Bu_{nt}-Bu_{n-1t})\\
&\to f(t,x_{*t})+Mx_*(t), \qquad n\to+\infty.
\end{aligned}$$

由 Lebesgue 控制收敛定理，有

$$\int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s,u_{ns})+Mu_{n-1}(s)-(Bu_{ns}-Bu_{n-1s})]ds$$
$$\to \int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s,x_{*s})+Mx_*(s)]ds, \qquad n\to+\infty. \tag{1.2.31}$$

所以

$$x_*(t)=\Phi(0)e^{-Mt}+\int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s,x_{*s})+Mx_*(s)]ds, \qquad t\in[0,t_1], \tag{1.2.32}$$

其中 $x_{*0}=\Phi$. 由 I_1 的定义，有

$$I_1(u_n(t))\to I_1(x_*(t_1)), \qquad n\to+\infty. \tag{1.2.33}$$

同上，有

$$\begin{aligned}x_*(t)=&[x_*(t_1)+I_1(x_*(t_1))]e^{-M(t-t_1)}\\&+\int_{t_1}^t e^{-M(t-s)}[f(s,x_{*s})+Mx_*(s)]ds, \qquad t\in(t_1,t_2],\end{aligned} \tag{1.2.34}$$

其中 $x_{*0}=\Phi$. 继续下去,

$$\begin{aligned}x_*(t)=&[x_*(t_n)+I_n(x_*(t_n))]e^{-M(t-t_n)}\\&+\int_{t_n}^t e^{-M(t-s)}[f(s,x_{*s})+Mx_*(s)]ds, \qquad t\in(t_n,T],\end{aligned} \tag{1.2.35}$$

其中 $x_{*0}=\Phi$, 则

$$\begin{aligned}x_*(t)=&\Phi\Phi(0)e^{-Mt}+\int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s,x_{*s})+Mx_*(s)]ds\\&+\sum_{0<t_k<t}e^{-M(t-t_k)}I_k(x_*(t_k)), \qquad t\in J.\end{aligned} \tag{1.2.36}$$

同上，有

$$\begin{aligned}x^*(t)=&\Phi\Phi(0)e^{-Mt}+\int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s,x_s^*)+Mx^*(s)]ds\\&+\sum_{0<t_k<t}e^{-M(t-t_k)}I_k(x^*(t_k)), \qquad t\in J,\end{aligned} \tag{1.2.37}$$

其中 $x_0^*=\Phi$.

最终, 若 $x \in PC([-\tau,T],R)$ 是系统 (1.2.10) 在 $[u,v]$ 上的一个解. 令 $p=u_n-x$ 并运用数学归纳法. 显然 $u \leqslant x$. 假设 $u_{n-1} \leqslant x$, 则

$$
\begin{aligned}
p' &= u_n' - x' \\
&= f(t,u_{n-1t}) - M(u_n(t)-u_{n-1}(t)) - (Bu_{nt} - Bu_{n-1t}) - f(t,x_t) \\
&= -Mp - Bp_t - [f(t,x_t) - f(t,u_{n-1t})] \\
&\quad + M(-x(t)+u_{n-1}(t)) + (-Bx_t + Bu_{n-1t}) \\
&\leqslant -Mp - Bp_t, \qquad t \in J, \quad t \neq t_k,
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
\Delta p|_{t=t_k} &= \Delta u_n|_{t=t_k} - \Delta x|_{t=t_k} \\
&= I_k(u_{n-1}(t_k)) - L_k[u_n(t_k) - u_{n-1}(t_k)] - I_k(x(t_k)) \\
&= -\{I_k(x(t_k)) - I_k(u_{n-1}(t_k)) + L_k[x(t_k) - u_{n-1}(t_k)]\} - L_k p(t_k) \\
&\leqslant -L_k p(t_k), \qquad k = 1,2,\cdots,m,
\end{aligned}
$$

且

$$p_0 = u_{n0} - x_0 = 0.$$

因此, 由引理 1.2.8, $p(t) \leqslant 0, t \in J$, 即 $u_n(t) \leqslant x(t), t \in J$. 所以 $u_n(t) \leqslant x(t), t \in J, n=1,2,\cdots$. 同上证明可得 $x(t) \leqslant v^{(n)}(t), t \in J, n=1,2,\cdots$, 即 $x_*(t) \leqslant x(t) \leqslant x^*(t), t \in J$. □

例 1.2.1 我们来考虑

$$
\begin{cases}
x' = \dfrac{1}{72}(t-x(t))^3 + \dfrac{1}{40}(t^2 - x(t-1))^5 \\
\qquad + \dfrac{1}{144}\left(\sin^2 t - \displaystyle\int_{-1}^{0} x(t+s)ds\right)^3, \qquad t \in (0,1], t \neq \dfrac{1}{2}, \\
\Delta\, x|_{t=\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{6} x\left(\dfrac{1}{2}\right), \\
x(0) = \varPhi(0), \\
x_0 = \varPhi,
\end{cases}
\tag{1.2.38}
$$

其中

$$
\varPhi(t) = \begin{cases}
1, & t \in \left[-1, -\dfrac{1}{2}\right), \\
\dfrac{1}{2}, & t \in \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right].
\end{cases}
$$

结论　IRFDE(1.2.38) 有最大解和最小解.

证明　令

$$u(t) = 0, \qquad t \in [-1, 1],$$

$$v(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 0], \\ 1 + t, & t \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right], \\ t + \dfrac{5}{6}, & t \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

易证 u, v 不是解且 $u(t) \leqslant v(t), t \in [-1, 1]$. 而且

$$\Delta u|_{t=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6} u\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\Delta v|_{t=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6} > -\frac{1}{2} = -\frac{1}{6} u\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$u'(t) = 0, \qquad t \in [0, 1],$$

$$v'(t) = 1, \qquad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right],$$

$$f(t, u_t) = \frac{1}{72} t^3 + \frac{1}{40} t^{10} + \frac{1}{144} \sin^6 t, \qquad t \in [0, 1],$$

$$f(t, v_t) = \frac{1}{72}(t - (1 + t))^3 + \frac{1}{40}(t^2 - 1)^5 + \frac{1}{144}\left(\sin^2 t - \int_{-1}^{0} v(t + s) ds\right)^3, \qquad t \in [0, 1],$$

则

$$\begin{cases} u'(t) \leqslant f(t, u_t), & t \in (0, 1), t \neq \dfrac{1}{2}, \\ \Delta u|_{t=\frac{1}{2}} \leqslant -\dfrac{1}{6} u\left(\dfrac{1}{2}\right), \\ u_0(0) \leqslant \varPhi(0), \\ u_0 \leqslant \varPhi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'(t) \geqslant f(t, v_t), & t \in J, t \neq \dfrac{1}{2}, \\ \Delta v|_{t=\frac{1}{2}} > -\dfrac{1}{6} v\left(\dfrac{1}{2}\right), \\ v(0) \geqslant \varPhi(0), \\ v_0 \geqslant \varPhi, \end{cases}$$

即条件 (A_1) 成立.

由计算，可知

$$\frac{1}{72}((t-x)^3-(t-y)^3)=-\frac{1}{24}(t-\eta(x,y))^2(x-y),$$

$$\frac{1}{40}((t^2-x)^5-(t^2-y)^5)=-\frac{1}{8}(t-\zeta(x,y))^4(x-y),$$

且

$$\frac{1}{144}((\sin^2 t-x)^3-(\sin^2 t-y)^3)=-\frac{1}{48}(\sin^2 t-\gamma(x,y))^2(x-y).$$

对任意的 $\psi\in M([-1,0],R)$, 令

$$B\psi=\frac{1}{8}\psi(-1)+\frac{1}{48}\int_{-1}^{0}\psi(s)ds,$$

则

$$f(t,\phi)-f(t,\psi)\geqslant-\frac{1}{24}(\phi(0)-\psi(0))-(B\phi-B\psi),$$

$\phi,\psi\in\{x_t,u(t)\leqslant x(t)\leqslant v(t),t\in[0,1]\}$ 且 $\phi\leqslant\psi$.

所以条件 (A_2) 也是成立的.

对 $u\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant y\leqslant x\leqslant v\left(\frac{1}{2}\right), I(x)-I(y)=-\frac{1}{6}(x-y)$, 所以条件 (A_3) 成立，即 $M=\frac{1}{24}, L_1=\frac{1}{6}, \Delta_1=\frac{1}{2}, \Delta_2=1$,

$$M_0<\frac{1}{224}+\frac{1}{8}=\frac{1}{6}.$$

对 $p_1(t)=u(t)-\Phi(t), t\in[-1,0]$, 有

$$L_{-1}=\frac{1}{2},\qquad \Delta=\max\left\{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right\}=1,\qquad \inf_{t\in[-1,0]}p_1(t)=-1<p_1(0)$$

且

$$p_1'(t)=0<M_0,\qquad t\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},0\right].$$

所以

$$M_0\Delta_1<\frac{5}{23}=\frac{(1-L_{-1})(1-L_1)}{1+(1-L_{-1})+(1-L_{-1})(1-L_1)}.$$

对 $p_2(t)=\Phi(t)-v(t)$, 有

$$p_2(0)=\frac{1}{2}\leqslant p_2(t),\qquad t\in[-1,0],$$

且

$$M_0 < \frac{5}{11} = \frac{(1-L_1)}{1+(1-L_1)}.$$

显然 (A_4) 成立. 由定理 1.2.5, 系统 (1.2.38) 有最大解和最小解. □

注 1.2.1　此结论可以推广到 Banach 空间中的脉冲时滞微分系统.

2. 无穷延滞脉冲微分系统的局部解和整体解

设 $J_0=(-\infty,0]$, $J=(0,+\infty)$,$R=(-\infty,+\infty)$, $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots$, $\lim\limits_{k\to+\infty}t_k=+\infty$. 设函数 $h:J_0\to J$ 连续且满足 $\int_{-\infty}^0 h(t)dt<+\infty, h(t)>0, t\in J_0$. 对 $a>0$ 定义 $PC([-a,0],R)=\{\psi:[-a,0]\to R|\forall t\in(-a,0],\psi(t^-)=\psi(t);\forall t\in[-a,0],\psi(t^+)$ 存在, 且除在有限个点 $t\in[a,b)$ 外均有 $\psi(t^+)=\psi(t)\}$. 定义范数 $\|x\|_{[-a,0]}=\sup\limits_{s\in[-a,0]}|x(s)|$, $PC_h((-\infty,0],R)=\{\psi:J_0\to R|\forall c>0,\psi|_{[-c,0]}\in PC([-c,0],R)$ 且 $\int_{-\infty}^0 h(t)\|\psi\|_{[t,0]}dt<+\infty\}$, $PC((0,a],R)=\{\psi:(0,a]\to R|$ 对每个 $t\neq t_k,\psi(t)$ 是连续的, 在 $t=t_k$ 点左连续, $\psi(t_k^+)$ 存在 $(k=1,2,\cdots,m,t_m\leqslant a<t_{m+1})\}$, $PC(J,R)=\{\psi:J\to R|\psi|_{(0,a]}\in PC((0,a],R)\}$, $PC_h((-\infty,a],R)=\{\psi:(-\infty,a]\to R|\psi|_{J_0}\in PC_h((-\infty,0],R),\psi|_{(0,a]}\in PC((0,a],R)\}$, 且 $PC_h(R,R)\{\psi:R\to R|\psi|_{J_0}\in PC_h((-\infty,0],R),\psi|_J\in PC(J,R)\}$.

现任给 $\psi\in PC_h((-\infty,0],R)$, 定义

$$\|\psi\|_h=\int_{-\infty}^0 h(s)\psi_{[s,0]}ds,$$

其中 $\psi_{[s,0]}=\sup\limits_{t\in[s,0]}|\psi(t)|$. 易得 $PC_h((-\infty,0],R)$ 是线性空间. 一般地, $PC_h((-\infty,0],R)$ 不是巴拿赫空间, 不满足文献 [14] 中巴拿赫空间的条件.

如果 $x\in PC(R,R)$, 定义 x_t 为 $x_t(s)=x(t+s),\forall s\in J_0$.

考虑延滞脉冲微分系统

$$\begin{cases} x'(t)=f(t,x(t),x(t-\tau),x_t), & t\neq t_k, \quad (1.2.39\text{a})\\ \Delta x|_{t=t_k}=I_k(x(t_k)), & t=t_k, \quad (1.2.39\text{b})\\ x(0^+)=\omega, & \quad (1.2.39\text{c})\\ x_0=\phi, & \quad (1.2.39\text{d})\end{cases} \tag{1.2.39}$$

其中 $f:J\times R\times R\times PC_h((-\infty,0],R)\to R$, $I_k:R\to R$, $k=1,2,\cdots$, $\Delta x(t)=x(t^+)-x(t^-)$, $\omega\in R$, $\phi\in PC_h((-\infty,0],R)$. 给定函数 $\psi\in PC([a,b])$, 设 s_i 表示 $\psi\in(a,b)$ 的点 i^{th} 且 $s_0=a,s_{m+1}=b$. 如果对每个 $i=0,\cdots,m$, 函数 $\eta:[s_i,s_{i+1}]\to R$ 定义

为

$$\eta(s)=\begin{cases}\psi(s_i^+), & s=s_i,\\ \psi(s), & s\in(s_i,s_{i+1}],\end{cases}$$

在 $[s_i,s_{i+1}]$ 上是绝对连续的，则称 ψ 在 $[a,b]$ 上是分段绝对连续的.

定义 1.2.1 如果 $x\in PC((-\infty,\alpha],R)(\alpha>0)$ 在 $(0,\alpha]$ 上是分段绝对连续的，对 $(0,\alpha]$ 内的每个 $t\neq t_k$ 是连续的，除了一个测度为零的集外对任意的 $t\in[0,\alpha]$ 满足系统 (1.2.39a) (这些例外点通常不只包括脉冲时刻 t_k), 并且任给 $t\in(0,\alpha)$ 满足系统 (1.2.39b) 及 $x(0^+)=\omega$, $x_0=\phi$, 则称 x 是系统 (1.2.39) 的一个解.

定义 1.2.2 设 $x(t)$ 是系统 (1.2.39) 的一个解， $t\in(-\infty,\alpha)$. 若存在系统 (1.2.39) 的另一个解 $y(t)$, $t\in(-\infty,\bar{\alpha})$, 使得

(1) $\bar{\alpha}>\alpha$,

(2) $x(t)=y(t)$, $t\in(-\infty,\alpha)$,

则称 $y(t)$ 是 $x(t)$ 的向右一个延拓，或简称为 $x(t)$ 的一个延拓，称 $x(t)$ 可延拓到 $(-\infty,\bar{\alpha})$. 若 $x(t)$ 是不可延拓的，则称 $x(t)$ 是系统 (1.2.39) 在 $(-\infty,\alpha)$ 上的一个饱和解，此时 $(-\infty,\alpha)$ 称为 $x(t)$ 的最大存在区间.

引理 1.2.11 设 $x\in PC((-\infty,a],R)(a>0)$, 则对 $t\in(0,a]$ $x_t\in PC_h((-\infty,0],R)$, 而且,

$$\|x_t\|_h\geqslant l|x(t)|,$$

其中

$$l=\int_{-\infty}^0 h(s)ds.$$

证明 对于任意 $t\in(0,a]$,

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^0 h(s)\|x_t\|_{[s,0]}ds\\&=\int_{-\infty}^{-t} h(s)\|x_t\|_{[s,0]}ds+\int_{-t}^0 h(s)\|x_t\|_{[s,0]}ds\\&\leqslant\int_{-\infty}^{-t} h(s)\max\{\|x_0\|_{[t+s,0]},\|x_t\|_{[-t,0]}\}ds+\int_{-t}^0 h(s)\|x\|_{[0,t]}ds\\&\leqslant\int_{-\infty}^0 h(s)\|x_0\|_{[s,0]}ds+2\int_{-\infty}^0 h(s)ds\sup_{t\in[0,a]}|x(t)|\\&=\|x_0\|_h+2l\sup_{t\in[0,a]}|x(t)|.\end{aligned}\tag{1.2.40}$$

既然 $x_0\in PC_h((-\infty,a],R)$, 那么 $x_t\in PC_h((-\infty,0],R)$, 而且

$$\|x_t^*\|_h=\int_{-\infty}^0 h(s)\|x_t^*\|_{[s,0]}ds\geqslant\int_{-\infty}^0 h(s)|x^*(t)|ds=l|x^*(t)|.$$

□

注 1.2.2 一般地，对 $x\in PC((-\infty,a],R)$，x_t 在 $t\in(0,a]$ 是不连续的．例如，设

$$x(t)=\begin{cases}0, & (-\infty,0]\\ 1, & (0,1].\end{cases}$$

任给 $t_0,t\in(0,a]$ 且 $t>t_0$，那么任给 $s<-t$，$\sup\limits_{r\in[s,\ 0]}|x(t+r)-x(t_0+r)|\geqslant|x(t-t_0)-x(0)|=1$，则

$$\begin{aligned}\|x_t-x_{t_0}\|_h&=\int_{-\infty}^{0}h(s)\|x_t-x_{t_0}\|_{[s,0]}ds\\&\geqslant\int_{-\infty}^{-t}h(s)\|x_t-x_{t_0}\|_{[s,0]}ds\\&\geqslant\int_{-\infty}^{-t}h(s)ds.\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{t\to t_0^+}\|x_t-x_{t_0}\|\geqslant\displaystyle\int_{-\infty}^{t_0}h(s)ds$. 因此 x_t 在 t_0 点是不连续的．又由 t_0 的任意性，x_t 是处处不连续的，那么即使对每个 $\psi\in PC_h((-\infty,0],R),F(\psi)$ 是连续的，$F(x_t)$ 可能是处处不连续的．为了保证 $F(x_t)$ 的可积性，需要加强某些条件.

定义 1.2.3 设函数 $G:PC_h((-\infty,0],R)\to R$, 若任给 $\{\phi_n\}\subseteq PC_h((-\infty,0],R)$，对 $s\in J_0$ 几乎处处有 $\lim\limits_{n\to\infty}\phi_n(s)=\phi_0(s)$，且存在 $\lim\limits_{n\to\infty}G(\phi_n)=G(\phi_0)$，则称 G 在 $\phi_0\in PC_h((-\infty,0],R)$ 是弱连续的．若任给 $\{\phi\}\in PC_h((-\infty,0],R)$, G 在 ϕ 是弱连续的，则称 G 在 $PC_h((-\infty,0],R)$ 上是弱连续的.

注 1.2.3 此定义在某种程度上可代替 1.1 节中的条件 $f(t,\psi)\in C(J\times L^1([-\tau,0],R)$.

为方便起见，现列出下列条件:

(a) 对固定的 $\phi\in PC_h((-\infty,0],R),f(t,x,y,\phi)$ 在 $(t,x,y)\in J\times R\times R$ 是连续的，对固定的 $(t,x,y)\in R,f(t,x,y,\phi)$ 在 ϕ 是弱连续的,

(b) 对任意的有界集 $I\subseteq J$, D_1, $D_2\subseteq R$, $D_3\subseteq PC_h((-\infty,0],R)$, $f(I,D_1,D_2,D_3)$ 是有界的,

(c) $I_k:R\to R$ 是连续的，$k=1,2,\cdots$.

引理 1.2.12 设 (a), (b) 成立，函数 $x\in PC_h((-\infty,\alpha],R)(\alpha>0)$ 是 (1.2.39) 的解当且仅当满足

$$x(t)=\begin{cases}\phi(t), & t\in J_0,\\ \omega+\displaystyle\int_0^t f(s,x(s),x(s-\tau),x_s)ds, & t\in(0,t_1],\\ x(t_k)+I(x(t_k))+\displaystyle\int_{t_k}^t f(s,x(s),x(s-\tau),x_s)ds, & \\ \qquad t\in(t_k,t_{k+1}],k=1,2,\cdots, & \end{cases}\tag{1.2.41}$$

或等价地,

$$x(t)=\begin{cases}\phi(t), & t\in J_0,\\ \omega+\displaystyle\int_0^t f(s,x(s),x(s-\tau),x_s)ds+\sum_{0<t_k<t}I(x(t_k)), & t\in(0,\alpha],\end{cases}\tag{1.2.42}$$

其中 $(t-\tau)=\phi(t-\tau)$, 任给 $t+s\leqslant 0$, $x_t(s)=x(t+s)=\phi(t+s)$.

证明 首先, 对 $x\in PC((-\infty,\alpha],R)$, 需证 $f(t,x(t),x(t-\tau),x_t)$ 在 $(0,\alpha]$ 上是可积的. 由引理 1.2.10, 任给 $t\in(0,\alpha]$, $x_t\in PC_h((-\infty,0],R)$. 给定 $t_0\in(0,\alpha]$, 几乎处处有

$$\lim_{t\to\bar t}x_t(s)=x_{\bar t}(s),\qquad s\in J_0,$$

则对每个 $\bar t\in(0,\alpha]$,$f(\cdot,\cdot,\cdot,x_t)$ 是连续的. 由条件 (a) 及 $x(t)$, $x(t-\tau)$ 均是分段连续函数, 知 $f(t,x(t),x(t-\tau),x_t)$ 在 $[0,\alpha]$ 上是分段连续函数, 再由条件 (b) 及 (1.2.40), 知 $f(t,x(t),x(t-\tau),x_t)$ 在 $(0,\alpha]$ 上是有界的, 因此 $f(t,x(t),x(t-\tau),x_t)$ 在 $(0,\alpha]$ 上是可积的. 所以易得 (1.2.41) 和 (1.2.42) 是等价的.

设 $x(t)$ 是 (1.2.39) 的一个解. 由 (1.2.39d), 知 x 满足 (1.2.41) 中的第一个表达式. 由 x 在 $(0,\alpha]$ 上是分段绝对连续的, 在 $t\neq t_k$ 连续且在 $(0,\alpha]$ 上几乎处处满足系统 (1.2.39a), 则任给子区间 $[u,v]\subseteq(0,\alpha]$ 且 $t_k\notin(u,v)$ 有

$$x(t)=x(u^+)+\int_u^t f(s,x(s),x(s-\tau),x_s)ds,\qquad t\in(u,v].\tag{1.2.43}$$

特别地, 若 $u=0$, $v=\min\{t_1,\alpha\}$, 则由 (1.2.39c) 得 $x(u^+)=\omega$, 因此由 (1.2.43) 得 (1.2.41) 中的第二个表达式. 若 $t_k\in(0,\alpha)$, 令 $u=t_k$, $v=\min\{t_{k+1},\ \alpha\}$, 由 x 在 t_k 点满足 (1.2.39b), 因此 $x(u^+)=x(t_k^+)+I_k(x(t_k))$, 所以由 (1.2.43) 得 (1.2.41) 中的第三个表达式.

相反地, 若 x 是 (1.2.39) 的一个解, 易得 (1.2.39b), (1.2.39c), (1.2.39d) 成立, 且 $x(t)$ 在 $[0,\alpha]$ 上是分段连续的. 由直接求导, 知除去一个零测度集外 (1.2.39a) 对 $t\in(0,\alpha]$ 成立. □

下面讨论存在性和唯一性.

首先给出下列引理.

引理 1.2.13[2] 设 $x\in PC([-a,\alpha],R)(a>0)$,$e(t)=\sup\limits_{s\in[-a,0]}|x_t(s)|$, $t\in[0,\alpha]$, 则 $e\in PC([0,\alpha],R^+)$, 并且 e 的唯一可能的不连续点是 t^* 和 t^*+a, 其中 t^* 是 x 的一个不连续点.

引理 1.2.14 设 $x\in PC((-\infty,\alpha],R)$,$g(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^0 h(s)\|x_t\|_{[s,0]}ds$, $t\in[0,\alpha]$. 则 $g\in PC([0,\alpha],R^+)$, 且 g 的唯一可能的不连续点是 t_*, 其中 t_* 是 x 的一个不连续点.

证明　往证对 $\forall t_* \in (0,\alpha]$, 有 $g(t_*^-) = g(t_*)$. 显然 $\forall t_* \in (0,\alpha]$, $g(t_*) = \int_{-\infty}^{0} h(s)\|x_{t_*}\|_{[s,0]}ds$. 对 $t < t_*$, 由引理 1.2.12,

$$\lim_{t\to t_*^-} \|x_t\|_{[s,0]} = \|x_{t_*}\|_{[s,0]}, \qquad s \in (-\infty, 0].$$

由勒贝格控制收敛定理,

$$g(t_*^-) = \lim_{t\to t_*^-} g(t) = \lim_{t\to t_*^-} \int_{-\infty}^{0} h(s)\|x_t\|_{[s,0]}ds = \int_{-\infty}^{0} h(s)\|x_{t_*}\|_{[s,0]}ds = g(t_*).$$

现设 $x(t)$ 在 t_* 点右连续, $B = \{s, x(t)$ 在 $t_* - s$ 右连续, $s \in (-\infty, 0]\}$. 由于 $x \in PC_h((-\infty,\alpha], R]$, 则 B 是一个勒贝格测度为 0 的集. 由引理 1.2.12, 有

$$\lim_{t\to t_*^+} \|x_t\|_{[s,0]} = \|x_{t_*}\|_{[s,0]}, \qquad \text{a.e. } s \in (-\infty, 0].$$

由勒贝格控制收敛定理，得

$$g(t_*^+) = \lim_{t\to t_*^+} g(t) = \lim_{t\to t_*^+} \int_{-\infty}^{0} h(s)\|x_t\|_{[s,0]}ds = \int_{-\infty}^{0} h(s)\|x_{t_*}\|_{[s,0]}ds = g(t_*).$$

同理，若 $x(t)$ 在 t^* 点不右连续，且 $x(t_*^+)$ 存在，易得 $g(t_*^+)$ 存在. □

定理 1.2.6(局部存在性)　设 (a),(b) 成立，则系统 (1.2.39) 至少有一个局部解.

证明　设 $M_1 = |\omega| + \sup_{t\in[-\tau,0]} |\phi(t)| + \|\phi\|_h + 1 + 2l(|\omega|+1)$, 由 (b) 得，存在一个 $M > 0$ 使得

$$|f(t,x,y,\psi)| \leqslant M$$

对 $\forall t \in [0,t_1], |x| \leqslant M_1, |y| \leqslant M_1, \|\psi\|_h \leqslant M_1$. 取 $t_1 \geqslant \delta > 0$ 且 $\delta M \leqslant 1$. 对 $x \in C([0,\delta], R)$, 定义

$$(Ax)(t) = \omega + \int_0^t f(s, x(s), x(s-\tau), x_s)ds,$$

其中 $x(t-\tau) = \phi(t-\tau)$, $x_t(s) = x(t+s) = \phi(t+s)$, $t+s<0$.

设 $D = \{x \in C([0,\delta], R), \|x-\omega\|_0 = \max_{t\in[0,\delta]} |x(t)-\omega| \leqslant 1\}$, 则对 $\forall x \in D, t \in [0,\delta]$,

$$|x(t-\tau)| \leqslant 1 + |\omega| + \sup_{t\in[-\tau,0]} |\phi(t)| \leqslant M_1, \qquad t \in [0,\delta],$$

由引理 1.2.10 得

$$\|x_t\|_h \leqslant \|\phi\|_h + 2l(|\omega|+1) \leqslant M_1.$$

所以对 $x \in D$, 几乎处处有

$$|(Ax)(t)-\omega| = \left|\int_0^t f(s,x(s),x(s-\tau),x_s)ds\right| \leqslant \delta M = 1,$$

$$\|Ax-\omega\|_0 \leqslant 1.$$

由此说明 $AD \subseteq D$.

对任给 $\varepsilon > 0$, 取 $0 < \delta_1 < \min\left\{\delta, \dfrac{\varepsilon}{M}\right\}$, 那么对任给 $x \in D$, 如果 $|t_1 - t_2| < \delta_1, t_1 < t_2$, 则有

$$|(Ax)(t_1)-(Ax)(t_2)| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} |f(s,x(s),x(s-\tau),x_s)|ds \leqslant \delta_1 M < \varepsilon.$$

所以 AD 在 $[0,\delta]$ 上是等度连续的.

下证 A 是连续的. 设 $\{x^{(n)}\} \subseteq D, x^{(0)} \in D$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x^{(n)}(t) - x^{(0)}(t)\|_0 = 0$. 易见对任给 $t \in [0,\delta]$, 有

$$\lim_{n\to+\infty} \|x^{(n)}(t) - x^{(0)}(t)\| = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \|x^{(n)}(t-\tau) - x^{(0)}(t-\tau)\|_0 = 0$$

和

$$\lim_{n\to+\infty} x_t^{(n)}(s) = x_t^{(0)}(s), \qquad s \in (-\infty, 0].$$

由勒贝格控制收敛定理, 条件 (a) 说明

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^t f(s,x^{(n)}(s),x^{(n)}(s-\tau),x_s^{(n)})ds - \int_0^t f(s,x^{(0)}(s),x^{(0)}(s-\tau),x_s^{(0)})ds\right| \\ \leqslant &\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta |f(s,x^{(n)}(s),x^{(n)}(s-\tau),x_s^{(n)}) - f(s,x^{(0)}(s),x^{(0)}(s-\tau),x_s^{(0)})|ds = 0.\end{aligned}$$

因此, $A: D \to D$ 连续. 故, $A: D \to D$ 是全连续的. 由 Schauder 不动点定理, A 至少有一个不动点 $\bar{x} \in D$. 最后, 令

$$x^*(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \in J_0, \\ \bar{x}(t), & t \in (0,\delta], \end{cases}$$

则 $x^*(t)$ 是 (1.2.39) 的一个解. □

定理 1.2.7(延拓) 设定理 1.2.6 的条件成立. 则系统 (1.2.39) 的任何解是可延拓的 (饱和解的最大存在区间是右开的), 而且, 若 x 是定义在 $(-\infty,\beta)$ 上的一个不可延拓解, $\beta < +\infty$, 则当 $t \to \beta^-$ 时, $x(t)$ 是无界的.

证明　设由定理 1.2.6 得到系统 (1.2.39) 的解为 $x^*(t)$, $t\in(-\infty,\delta]$. 此时有以下两种情形:

(1) $\delta<t_1$.

取 $t_1\geqslant\delta_1>\delta$, 考虑

$$(A_1x)(t)=x^*(\delta)+\int_\delta^t f(s,x(s),x(s-\tau),x_s)ds,$$

其中 $x\in C([\delta,\delta_1],R)$. 任给 $t-\tau<\delta$, $s+t<\delta$, 有 $x(t-\tau)=x^*(t-\tau)$, $x_t(s)=x^*(t+s)$. 同定理 1.2.6 的证明, 得解 x^{**}, $t\in(-\infty,\delta_1]$, 满足 $x^*(t)=x^{**}(t)$, $t\in(-\infty,\delta]$.

(2) $\delta=t_1$.

取 $t_2\geqslant\delta_1>\delta$, 考虑

$$(A_1x)(t)=x^*(t_1)+I_1(x^*(t_1))+\int_{t_1}^t f(s,x(s),x(s-\tau),x_s)ds,$$

其中 $x\in C([t_1,\delta_1],R)$, 任给 $t-\tau<t_1$, $s+t<t_1$, 有 $x(t-\tau)=x^*(t-\tau)$, $x_t(s)=x^*(t+s)$. 同定理 1.2.6 的证明, 得解 x^{**}, $t\in(-\infty,\delta_1]$, 满足 $x^*(t)=x^{**}(t)$, $t\in(-\infty,t_1]$.

设 x 是系统 (1.2.39) 的定义在 $(-\infty,\beta)$ 上的一个不可延拓解, $\beta<+\infty$. 若 $\{x(t),\ t\in(0,\beta)\}$ 是有界的, 可取 $\beta>\beta_0>0$ 使 $t_k\notin[\beta_0,\beta)(k=1,2,\cdots)$. 由 $\{x(t),\ t\in(0,\beta)\}$ 的有界性及 (1.2.40), 知 $\{x_t,\ t\in(0,\beta)\}$ 在 $PC_h((-\infty,0],R)$ 上是有界的. 因此任给 $t\in(0,\beta)$, 存在 $\bar{M}>0$ 使 $|f(t,x(t),x(t-\tau),x_t)|\leqslant\bar{M}$, 则对 $\beta_0\leqslant\bar{t}<t<\beta$,

$$|x(t)-x(\bar{t})|\leqslant\int_{\bar{t}}^t|f(s,x(s),x(s-\tau),x_s)|ds\leqslant M(t-\bar{t}).$$

由柯西准则, $\lim\limits_{t\to\delta^-}x(t)$ 存在. 由前面的方法知 x 是可延拓的, 此与假设矛盾. 故当 $t\to\beta^-$ 时, $x(t)$ 是无界的. □

定理 1.2.8(整体存在性)　设条件 (a), (b) 成立, 存在 $L,\ M,\ N,K\in L_1^{\rm loc}(J,R^+)$ 及非减函数 $c\in C(R^+,R^+)$ 使任给 $t\in J$, $x,y\in R$, $\psi\in PC_h((-\infty,0],R)$, 有 $|f(t,x,y,\psi)|\leqslant L(t)+M(t)|x|+N(t)c(|y|)+K(t)\|\psi\|_h$, 存在 (1.2.39) 的饱和解 $x^*(t)$, 其存在区间为 $(-\infty,+\infty)$.

证明　由定理 1.2.7, x^* 可以延拓成最大存在区间. 设最大存在区间为 $(-\infty,\beta)$, $\beta<+\infty$. 由定理 1.2.7, 当 $t\to\beta$ 时, $x(t)$ 是无界的. 下证 $x(t)$ 在 $(-\infty,\beta)$ 上是有界的, 从而得矛盾. 不失一般性, 设 $\beta>\tau$(对 $\beta\leqslant\tau$ 的情形, 证明类似). 令

$W_1 = |\omega| + \sum\limits_{0<t_k<\beta} |I_k(x^*(t_k))|$, $W_2 = \|x^*_{\beta-\tau}\|_h$. 由 (1.2.43), 对 $t \in [\beta-\tau, \beta)$ 有

$$
\begin{aligned}
|x^*(t)| &\leqslant |\omega| + \left|\sum_{0<t_k<\beta} I_k(x^*(t_k))\right| + \left|\int_0^t f(s, x^*(s), x^*(s-\tau), x^*_s)ds\right| \\
&\leqslant W_1 + \int_0^t (L(s) + M(s)|x^*(s)| + N(s)c(|x^*(s-\tau)|) + K(s)\|x^*_s\|_h)ds \\
&= W_1 + \int_0^{\beta-\tau} (M(s)|x^*(s)| + K(s)\|x^*_s\|_h)ds + \int_0^t (L(s) + N(s)c(|x^*(s-\tau)|)ds \\
&\quad + \int_{\beta-\tau}^t (M(s)|x^*(s)| + K(s)\|x^*_s\|_h)ds. \qquad (1.2.44)
\end{aligned}
$$

由 $x^*(t)$ 在 $[-\tau, \beta-\tau]$ 上有界，设 $W_3 = \max\{\max\{|x^*(t)|,\ t \in [-\tau, \beta-\tau]\},\ W_1 + \int_0^{\beta-\tau} (M(s)|x^*(s)| + K(s)\|x^*_s\|_h)ds + \int_0^\beta (L(s) + N(s)c(|x^*(s-\tau)|))ds\}$. 由 (1.2.44), 对 $t \in [\beta-\tau, \beta)$ 有

$$
|x^*(t)| \leqslant W_3 + \int_{\beta-\tau}^t (M(s)|x^*(s)| + K(s)\|x^*_s\|_h)ds. \qquad (1.2.45)
$$

由引理 1.2.10, 任给 $t \in [\beta-\tau, \beta)$,

$$
\|x^*(t)\|_h \geqslant l|x^*(t)|. \qquad (1.2.46)
$$

由 (1.2.45) 及 (1.2.46), 对 $t \in [\beta-\tau, \beta)$, 得

$$
|x^*(t)| \leqslant W_3 + \int_{\beta-\tau}^t \left(M(s)\frac{1}{l} + K(s)\|x^*_s\|_h\right) ds,
$$

再由引理 1.2.10, 对 $t \in [\beta-\tau, \beta)$, 得

$$
\begin{aligned}
\|x^*_t\|_h &= \int_{-\infty}^0 h(s)\|x^*_t\|_{[s,0]}ds \\
&\leqslant \|x^*_{\beta-\tau}\|_h + 2l \sup_{s\in[-\beta,t]} |x^*(s)| \\
&\leqslant W_2 + 2lW_3 + 2l\int_{\beta-\tau}^t \left(M(s)\frac{1}{l} + K(s)\|x^*_s\|_h\right) ds.
\end{aligned}
$$

令 $g(t) = \|x^*_t\|_h$, $\beta-\tau < \beta_1 < \beta$, 则由引理 1.2.12, $g \in PC([\beta-\tau, \beta_1], R^+)$. 由 Gronwall 不等式得

$$
\begin{aligned}
g(t) \leqslant{}& W_2 + 2lW_3 + 2l\int_{\beta-\tau}^t M(s)\frac{1}{l}ds + \int_{\beta-\tau}^t \left(W_2 + 2lW_3 + 2l\int_{\beta-\tau}^s M(\tau)\frac{1}{l}d\tau\right) \\
&\cdot K(s)e^{\int_s^t K(\tau)d\tau}ds
\end{aligned}
$$

设 $W = W_2 + 2lW_3 + 2l\int_{\beta-\tau}^{t} M(s)\frac{1}{l}ds + \int_{\beta-\tau}^{t}\left(W_2 + 2lW_3 + 2l\int_{\beta-\tau}^{s} M(\tau)\frac{1}{l}d\tau\right)$ $\cdot K(s)e^{\int_s^t K(\tau)d\tau}ds$ 则任给 $t \in (\beta-\tau, \beta_1]$, 有 $g(t) \leqslant W$. 故任给 $t \in (\beta-\tau, \beta_1]$, 有 $|x^*(t)| \leqslant \frac{1}{l}g(t) \leqslant \frac{1}{l}W$. 由 β_1 的任意性, 知任给 $t \in [\beta-\tau, \beta)$, 有 $|x^*(t)| \leqslant \frac{1}{l}W$. 此与当 $t \to \beta^-$ 时 $x^*(t)$ 是无界的矛盾. □

定理 1.2.9(唯一性) 设条件 (a), (b) 成立, 存在 $M, N, K \in L_1^{\rm loc}(J, R^+)$ 使任给 $t \in J$, x, y, x_1, $y_1 \in R$, ψ, $\psi_1 \in PC_h((-\infty, 0], R)$, 及 $\gamma > 0$ 有 $|f(t, x, y, \psi) - f(t, x_1, y_1, \psi_1)| \leqslant M(t)|x - x_1| + N(t)|y - y_1| + K(t)\|\psi - \psi_1\|_h$, 则系统 (1.2.39) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在唯一的整体解.

证明 易知定理 1.2.8 的条件成立, 故系统 (1.2.39) 的任何局部解都可延拓到 $+\infty$, 并且系统 (1.2.39) 至少存在一个整体解 x^*. 设 y^* 是另一整体解且 $x^* \neq y^*$, 定义 $t^* = \sup\{t \in (0, +\infty), \forall\ s \in (-\infty, t],\ x^*(s) = y^*(s)\}$. 则当 $t \in (-\infty, t^*]$ 时, 有 $x^*(s) = y^*(s)$. 设 $\varepsilon > 0$ 充分小使任给 k 及 $\varepsilon < \frac{\tau}{2}$, 有 $t_k \notin (t^*, t^* + \varepsilon)$. 设 $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ 使得

$$\int_{t^*}^{t^*+\delta}\left(\frac{1}{l}M(s) + K(s)\right)ds < \frac{1}{2l}. \tag{1.2.47}$$

故对 $t \in [t^*, t^* + \delta]$, 有

$$x^*(t-\tau) = y^*(t-\tau)$$

及

$$\begin{aligned}
|x^*(t) - y^*(t)| &= \left|\int_{t^*}^{t}(f(s, x^*(s), x^*(s-\tau), x_s^*) - f(s, y^*(s), y^*(s-\tau), y_s^*))\right| ds \\
&\leqslant \int_{t^*}^{t}|f(s, x^*(s), x^*(s-\tau), x_s^*) - f(s, y^*(s), y^*(s-\tau), y_s^*)|ds \\
&\leqslant \int_{t^*}^{t}(M(s)|x^*(s) - y^*(s)| + N(s)|x^*(s-\tau) \\
&\quad - y^*(s-\tau)| + K(s)\|x_s^* - y_s^*\|_h)ds \\
&= \int_{t^*}^{t}(M(s)|x^*(s) - y^*(s)| + K(s)\|x_s^* - y_s^*\|_h)ds.
\end{aligned} \tag{1.2.48}$$

由 (1.2.46) 及 (1.2.48), 对 $t \in [t^*, t^* + \delta]$ 有

$$|x^*(t) - y^*(t)| \leqslant \int_{t^*}^{t}\left(\frac{1}{l} + K(s)\|x_s^* - y_s^*\|_h\right)ds. \tag{1.2.49}$$

另一方面，由 $\sup\limits_{t\in(-\infty,t^*+\delta)}|x^*(t)-y^*(t)|=\sup\limits_{t\in[t^*,t^*+\delta]}|x^*(t)-y^*(t)|$, 对 $t\in[t^*,t^*+\delta]$,

$$\begin{aligned}\|x_t^*-y_t^*\|_h&=\int_{-\infty}^0 h(s)\|x_t^*-y_t^*\|_{[s,0]}ds\\&\leqslant\int_{-\infty}^0 h(s)ds\max\{|x^*(t)-y^*(t)|,\quad t\in[t^*,t^*+\delta]\}\\&=l\max\{|x^*(t)-y^*(t)|,\quad t\in[t^*,t^*+\delta]\},\end{aligned}$$

则由 (1.2.49), 有

$$|x^*(t)-y^*(t)|\leqslant\int_{t^*}^t\left(\frac{1}{l}+K(s)\right)dsl\max\{|x^*(t)-y^*(t)|,\ t\in[t^*,t^*+\delta]\}.$$

故

$$\begin{aligned}&\max\{|x^*(t)-y^*(t)|,\ t\in[t^*,t^*+\delta]\}\\\leqslant&\int_{t^*}^{t^*+\delta}\left(\frac{1}{l}+K(s)\right)dsl\max\{|x^*(t)-y^*(t)|,\ t\in[t^*,t^*+\delta]\}\\\leqslant&\frac{1}{2}\max\{|x^*(t)-y^*(t)|,\ t\in[t^*,t^*+\delta]\}.\end{aligned}$$

故任给 $t\in[t^*,t^*+\delta]$, 有 $x^*(t)=y^*(t)$, 此 t^* 与定义矛盾. 故 $x^*(t)=y^*(t)$, $t\in(-\infty,+\infty)$. □

下面我们讨论系统 (1.2.39) 的最大解和最小解的存在性.

设 $Q=\{x\in PC_h((-\infty,0],R),\ x(t)\geqslant 0,\ t\in(-\infty,+\infty)\}$, 则 $Q\in PC_h((-\infty,0],R)$ 是一个锥. 设 $B:PC(J_0,R)\to R$ 是正线性算子，满足条件 (a) 且范数为

$$\|B\|=\sup_{x\in PC_h((-\infty,0],R),\|x\|_h=1}Bx.$$

引理 1.2.15(比较结果) 设 $p\in PC(R,R)\cap C^1(J',R)$ 满足

$$\begin{cases}p'\leqslant -Mp-Bp_t-LC_{p_t}, & t\in J,t\neq t_k,\\ \Delta p|_{t=t_k}\leqslant -L_kp(t_k), & k=1,2,\cdots,\\ p(0^+)\leqslant 0,\qquad p_0=0,\end{cases}\tag{1.2.50}$$

其中常数 $M>0$, $0\leqslant L_k<1(k=1,2,\cdots,m,\cdots)$, $J'=J-\{0,t_1,t_2,\cdots,\}$ 且

$$M_0=Le^{M\tau}+\|B\|.$$

又设

$$M_0\Delta \leqslant \frac{\prod_{k=j}^{+\infty}(1-L_k)}{1+\sum_{j=1}^{+\infty}\prod_{k=j}^{+\infty}(1-L_k)}, \tag{1.2.51}$$

其中 $\Delta = \sup\{t_1, t_2 - t_1, \cdots, t - t_m, \cdots\} < +\infty$. 则对 $t \in J$ 几乎处处有 $p(t) \leqslant 0$, 而且若 $p(0^+) < 0$, 则 $p(t) < 0,\ t \in (0, +\infty)$.

证明 令 $v(t) = e^{Mt}p(t), t \in (-\infty, +\infty)$. 则由 (1.2.50) 得

$$\begin{cases} v'(t) \leqslant -B_1 v_t - Le^{M\tau_1}v(t-\tau_1), & t \in (0,+\infty),\ t \neq t_k, \\ \Delta v|_{t=t_k} \leqslant -L_k v(t_k), & k = 1, 2, \cdots, \\ v(0^+) \leqslant 0, \\ v_0 = 0, \end{cases} \tag{1.2.52}$$

其中 $B_1 v_t = B\psi,\ \psi(t+s) = e^{-Ms}v(t+s)$. 易得 $\|B_1\| \leqslant \|B\|$. 下证 $v(t) \leqslant 0,\ t \in (0, +\infty)$.

事实上，若存在 $0 < t^*$, $v(t^*) > 0$, 恰好可设 $t^* \neq t_1, t_2, \cdots$(若不然可取 $\bar{t}$ 与 t^* 充分接近使 $v(\bar{t}) > 0$), 令

$$\inf_{0 < t \leqslant t^*} v(t) = -b. \tag{1.2.53}$$

(A) 情形 $b = 0$, 则 $v(t) \geqslant 0,\ t \in (0, t^*]$. 则任给 $t \in [0, t^*]$, $-x_t \in Q$. 因此 $t \in [0, t^*], v'(t) \leqslant 0$, 且

$$v(t_k^+) = v(t_k) + \Delta v|_{t=t_k} \leqslant (1-L_k)v(t_k) \leqslant v(t_k).$$

故 $v(t)$ 在 $(0, t^*]$ 上是不减的. 则 $v(0^+) \geqslant v(t^*) > 0$. 矛盾.

(B) 情形 $b > 0$. 设 $t^* \in (t_i, t_{i+1}]$. 易得存在 $0 < t_* < t^*$ 使 $v(t_*) = -b$ 或 $v(j^+) = -b$, 其中 t_* 在某个 $(t_j, t_{j+1}](j \leqslant i)$ 中. 设 $v(t_*) = -b$(对情形 $v(j^+) = -b$, 类似可证). 由中值定理，得

$$\begin{cases} v(t^*) - v(t^+) = v'(\zeta_i)(t^* - t_i), & t_i < \zeta_i < t^*, \\ v(t_i) - v(t_{i-1}^+) = v'(\zeta_{i-1})(t_i - t_{i-1}), & t_{i-1} < \zeta_i < t_i, \\ \quad\vdots \\ v(t_{j+2}) - v(t_{j+1}^+) = v'(\zeta_{j+1})(t_{j+2} - t_{j+1}), & t_{j+1} < \zeta_{j+1} < t_{j+2}, \\ v(t_{j+1}) - v(t_*) = v'(\zeta_*)(t_{j+1} - t^*), & t_* < \zeta_* < t_{j+1}. \end{cases} \tag{1.2.54}$$

另一方面，对 $t \in (0, t^*]$

$$v'(t) \leqslant -B_1 v_t - Le^{M\tau_1} v(t-\tau_1) \leqslant (\|B\| + Le^{M\tau_1})b = M_0 b.$$

现由 (1.2.52) 有

$$v(t_k^+) \leqslant (1-L_k)v(t_k), \qquad k = 1, 2, \cdots,$$

且由 (1.2.54)

$$\begin{cases} v(t^*) - (1-L_i)v(t_i) \leqslant bM_0\Delta, \\ v(t_i) - (1-L_{i-1})v(t_{i-1}) \leqslant bM_0\Delta, \\ \quad \vdots \\ v(t_{j+2}) - (1-L_{j+1})v(t_{j+1}) \leqslant bM_0\Delta, \\ v(t_{j+1}) + b \leqslant bM_0\Delta. \end{cases} \tag{1.2.55}$$

所以得

$$0 < v(t^*) \leqslant -b \prod_{k=j+1}^{i} (1-L_k) + bM_0\Delta \left\{ 1 + \sum_{l=j+1}^{i} \prod_{k=l}^{i} (1-L_k) \right\},$$

而且

$$M_0\Delta > \frac{\prod\limits_{k=j+1}^{i} (1-L_k)}{1 + \sum\limits_{l=j+1}^{i} \prod\limits_{k=l}^{i} (1-L_k)} \geqslant \frac{\prod\limits_{k=j+1}^{+\infty} (1-L_k)}{1 + \sum\limits_{l=1}^{+\infty} \prod\limits_{k=l}^{+\infty} (1-L_k)},$$

此与 (1.2.51) 矛盾.

由 (A), (B) 得 $v(t) \leqslant 0,\ t \in (0, +\infty)$. □

定理 1.2.10(比较结果) 设定理 1.2.8 的条件满足. 存在 $M > 0$, $L > 0$, $1 > L_k \geqslant 0$ 及正线性算子 $B : PC_h((-\infty, 0], R) \to R$ 使任给 $x \geqslant \bar{x} \in R$, $y \geqslant \bar{y} \in R$, $\psi \geqslant \bar{\psi} \in PC_h((-\infty, 0], R)$ 有

$$f(t, x, y, \psi) - f(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{\psi}) \geqslant -M(x-\bar{x}) - L(y-\bar{y}) - B(\psi - \bar{\psi}),$$

$$I_k(x) - I_k(\bar{x}) \geqslant -L_k(x-\bar{x}), \qquad k = 1, 2, \cdots,$$

且条件 (1.2.51) 成立，则系统 (1.2.39) 有一个最大整体解和一个最小整体解.

证明　设 $y_m = \dfrac{1}{m}$, $m = 1, 2, \cdots$. 首先考虑系统

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), x_t), & t \neq t_k, \\ \Delta x|_{t=t_k} = I_k(x(t_k)), & k = 1, 2, \cdots, \\ x(0^+) = \omega + y_m, \\ x_0 = \phi. \end{cases} \tag{1.2.56}$$

由定理 1.2.8, 对每个 $m > 0$, 系统 (1.2.56) 至少有一个整体解 $x^{(m)}(t)$ 满足 $x^{(m)}(0^+) = \omega + y_m$ 和 $x_0^{(m)} = \Phi(m = 1, 2, \cdots)$.

令 $p(t) = x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t)$. 由引理 1.2.14 得 $p(t) \leqslant 0$, $t \in (0, T]$ 及 $p(t) < 0$, $t \in (0, t_1]$. 故 $x^{(1)}(t) \geqslant x^{(2)}(t) \geqslant \cdots \geqslant x^{(m)}(t) \geqslant \cdots$, $t \in (-\infty, T]$.

定义

$$\bar{x}^{(m)}(t) = \begin{cases} x^{(m)}(0^+), & t = 0, \\ x^{(m)}(t), & t > 0. \end{cases}$$

现在考虑 $S = \{\bar{x}^{(m)}\}$. 易知任给 $n > 0$,s 在 $[0, t_n]$ 上一致有界且分段等度连续. 故 $S_{[0,t_n]}$ 在 $PC([0, t_n], R)$ 上是相对紧的. 由 n 的任意性，知 S 在 $PC([0, +\infty), R)$ 上是相对紧的. 因此 S 有收敛子列，而且 $\{\bar{x}^{(m)}\}$ 是单调的，存在 $\bar{x} \in PC([0, +\infty), R)$ 使得

$$\bar{x}^{(m)} \to \bar{x}, \qquad m \to +\infty.$$

由勒贝格控制收敛定理，$t \in (0, t_1]$,

$$\int_0^t f(s, \bar{x}^{(m)}(s), \bar{x}^{(m)}(s-\tau), \bar{x}_s^{(m)})ds \to \int_0^t f(s, \bar{x}(s), \bar{x}(s-\tau), \bar{x}_s)ds, \qquad m \to +\infty,$$

其中对 $t + s < 0$, $\bar{x}_t(s) = \Phi(t+s)$. 由 I_1 的连续性,

$$I_1(\bar{x}^{(m)}(t_1)) \to I_1(\bar{x}(t_1)), \qquad m \to +\infty.$$

同理，对 $(t_1, t_2]$ 有

$$\bar{x}^{(m)}(t_1) + I_1(\bar{x}^{(m)}(t_1)) + \int_{t_1}^t f(s, \bar{x}^{(m)}(s), \bar{x}^{(m)}(s-\tau), \bar{x}_s^{(m)})ds$$

$$\to \bar{x}(t_1) + I_1(\bar{x}(t_1)) + \int_{t_1}^t f(s, \bar{x}(s), \bar{x}(s-\tau), \bar{x}_s)ds, \qquad m \to +\infty,$$

其中对 $t + s < 0$, $\bar{x}_t(s) = \Phi(t+s)$. 故任给 $t \in (0, +\infty)$ 有

$$\bar{x}^{(m)}(t) = \omega + \frac{1}{m} + \int_0^t f(s, \bar{x}^{(m)}(s), \bar{x}^{(m)}(s-\tau), \bar{x}_s^{(m)})ds + \sum_{t_k \in (0,t)} I_k(\bar{x}^{(m)}(t_k)) \to$$

$$\omega + \int_0^t f(s, \bar{x}(s), \bar{x}(s-\tau), \bar{x}_s)ds + \sum_{t_k \in (0,t)} I_k(\bar{x}(t_k)), \qquad m \to +\infty,$$

其中对 $t+s<0$, $\bar{x}_t(s) = \Phi(t+s)$. 由 $\bar{x}^{(m)}(t) \to \bar{x}(t)$, $t \in [0, +\infty)$, 得

$$\bar{x}(t) = \omega + \int_0^t f(s, \bar{x}(s), \bar{x}(s-\tau), \bar{x}_s)ds + \sum_{t_k \in (0,t)} I_k(\bar{x}(t_k)), \qquad t \in [0, +\infty),$$

其中对 $t+s<0$, $\bar{x}(t-\tau) = \Phi(t-\tau)$, $\bar{x}_t(s) = \Phi(t+s)$.

令

$$\bar{x}^*(t) = \begin{cases} \Phi(t), & t \in J_0, \\ \bar{x}(t), & t \in (0, +\infty), \end{cases}$$

易得 $\bar{x}^*(t)$ 是系统 (1.2.39) 的一个整体解.

下证 $\bar{x}^*$ 是系统 (1.2.39) 的一个最大整体解. 设 x^* 是系统 (1.2.39) 的任意一个整体解. 令 $p(t) = x^*(t) - x^{(m)}(t)$, 则

$$\begin{cases} p'(t) \leqslant -Mp(t) - Lp(t-\tau) - Bp_t, & t \neq t_k, \\ \Delta p|_{t=t_k} \leqslant -L_k p(t_k), & k = 1, 2, \cdots, \\ p(0^+) < 0, \\ p_0 = 0. \end{cases} \tag{1.2.57}$$

由引理 1.2.14 得 $p(t) \leqslant 0$, $t \in (0, T]$. 则任给 $m > 0$, $x^*(t) \leqslant x^{(m)}(t)$, $t \in (0, T]$. 故

$$x^*(t) \leqslant \lim_{m \to +\infty} x^{(m)}(t) = \bar{x}^*(t), \qquad t \in (0, T].$$

故 $\bar{x}^*$ 是系统 (1.2.39) 的一个最大整体解.

下面考虑最小整体解的存在性. 类似地考虑系统

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), x_t), & t \neq t_k, \\ \Delta x|_{t=t_k} = I_k(x(t_k)), & k = 1, 2, \cdots, \\ x(0^+) = \omega - y_m, \\ x_0 = \phi, \end{cases} \tag{1.2.58}$$

$m = 1, 2, \cdots$. 用同样的证明方法, 可以得到一个最小整体解. □

例 1.2.2 考虑下列系统

$$\begin{cases} x'(t) = \cos(t)x(t)^{\frac{1}{3}} + t^2x^2(t-1) + \ln\left(1 + \left|\int_{-\infty}^0 e^s x_t(s)ds\right|\right), & t \neq t_k, \\ \Delta x\big|_{t=t_k} = k(x(t_k)), & k = 1, 2, \cdots, \\ x(0^+) = 1, \\ x_0 = \phi, \end{cases} \tag{1.2.59}$$

其中

$$\Phi(t) = -t.$$

结论　系统 (1.2.59) 至少有一个整体解.

证明　设 $h(t) = e^t,\ t \in (-\infty, 0]$. 对 $\psi \in PC_h((-\infty, 0], R)$, 令

$$B\psi = \int_{-\infty}^{0} e^s \psi(s) ds,$$

则 $f(t, x, y, \psi) = \cos(t) x^{\frac{1}{3}} + t^2 y^2 + \ln(1 + |B\psi|)$. 易证 f 满足条件 (a) 及 (b), 而且,

$$|f(t, x, y, \psi)| \leqslant 1 + |x| + t^2 |y|^2 + |B\psi|.$$

由定理 1.2.7 及定理 1.2.8, 知系统 (1.2.59) 至少有一个整体解. □

例 1.2.3　考虑下列系统

$$\begin{cases} x'(t) = -\cos(t^2)x(t) + x(t)^{\frac{1}{3}} - \dfrac{1}{30}\ln(1 + |x(t-1)|) - \dfrac{1}{12}\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^s x_t(s) ds, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \neq t_k, \\ \Delta x|_{t=t_k} = -\left(1 - \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2^k}}}\right) x(k), \qquad\qquad k = 1, 2, \cdots, \\ x(0^+) = 0, \\ x_0 = \Phi, \end{cases} \tag{1.2.60}$$

其中

$$\phi(t) = \begin{cases} -1, & t \in (-\pi, 0], \\ -2, & t \in (-2\pi, -\pi], \\ \ \vdots & \ \vdots \\ -n, & t \in (-(n+1)\pi, -n\pi], \\ \ \vdots & \ \vdots \end{cases}$$

结论　系统 (1.2.60) 有一个最大整体解和最小整体解.

证明　设 $h(t) = e^t,\ t \in J_0$. 对 $\psi \in PC_h((-\infty, 0], R)$, 令

$$B\psi = \frac{1}{12}\int_{-\infty}^{0} e^s \psi(s) ds.$$

易知 B 满足条件 (a) 及 $\|B\| \leqslant 1$, 则 $f(t, x, y, \psi) = -\cos(t)x + x^{\frac{1}{3}} - \dfrac{1}{30}\ln(1 + |y|) - B\psi,\ I_k(x) = \left(1 - \dfrac{1}{\frac{1}{2^k}}\right)$, 且

$$|f(t, x, y, \psi)| \leqslant 1 + 2|x| + \frac{1}{30}|y| + \frac{1}{12}\|\psi\|_h.$$

显然 $f(t,x,y,\psi)$ 满足条件 (a) 及 (b). 任给 $x \geqslant \bar{x} \in R$, $y \geqslant \bar{y} \in R$, $\psi \geqslant \bar{\psi} \in PC_h((-\infty,0],R)$,

$$\begin{aligned} f(t,x,y,\psi)-f(t,\bar{x},\bar{y},\bar{\psi}) = & -\cos(t)(x-\bar{x})+x^{\frac{1}{3}}-\bar{x}^{\frac{1}{3}} \\ & -\frac{1}{30}(\ln(1+|y|)-\ln(1+|\bar{y}|))-(B\psi-B\bar{\psi}) \\ \geqslant & -(x-\bar{x})-\frac{1}{30}(y-\bar{y})-(B\psi-B\bar{\psi}), \end{aligned}$$

$$I_k(x)-I_k(\bar{x}) = -\left(1-\frac{1}{\frac{1}{2^k}}\right)(x-\bar{x}),$$

则 $M=1$, $L=\frac{1}{30}$, $\|B\|=\frac{1}{12}$, $L_k=1-\frac{1}{2^{\frac{1}{2^k}}}$, $\Delta=1$, 且

$$\prod_{k=1}^{+\infty}(1-L_k)=\frac{1}{2^{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}}}=\frac{1}{2}$$

及

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\prod_{n=k}^{+\infty}(1-L_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{k-1}}=2.$$

故

$$M_0\Delta=\frac{1}{30}e+\frac{1}{12}<\frac{1}{6}$$

$$=\frac{\prod\limits_{k=j+1}^{+\infty}(1-L_k)}{1+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\prod\limits_{n=k}^{+\infty}(1-L_k)}.$$

因此定理 1.2.10 的条件成立, 则系统 (1.2.60) 有一个最大整体解和最小整体解. □

3. 解对初值的连续依赖性和可微性

我们主要考虑系统

$$\begin{cases} x'=f(t,x_t), & t\neq t_k, \\ \Delta\, x|_{t=t_k}=I_k(x(t_k)), & k=1,2,\cdots, \\ x(t_0^+)=\omega, \\ x_{t_0}=\Phi, \end{cases} \tag{1.2.61}$$

这里 $\Phi \in PC([-\tau+t_0, t_0])$ 和系统

$$\begin{cases} x' = f(t, x_t), & t \neq t_k, \\ \Delta x|_{t=t_k} = I_k(x(t_k)), & k = 1, 2, \cdots, \\ x(0^+) = \omega, \\ x_0 = \Phi, \end{cases} \tag{1.2.62}$$

这里 $\Phi \in PC((-\infty, t_0])$.

我们有如下的定理.

引理 1.2.16(见 [1]) 设 $\Omega \subseteq R \times C$ 开集, $(\sigma^\circ, \Phi^\circ) \in \Omega$, $f^\circ \in C(\Omega, R)$, x° 是系统过 $(\sigma^\circ, \Phi^\circ)$ 的唯一解, $t \in [\sigma^\circ - r, b]$. 令 $W^\circ = \{(t, x_t) : t \in [\sigma^\circ, b]\} \subseteq \Omega$ 是紧集, V° 是 W° 的邻域, 在 V° 上 f° 是有界的. 若 (σ^k, Φ^k, f^k), $k = 1, 2, \cdots$ 满足 $\sigma^k \to \sigma^\circ$, $\Phi^k \to \Phi^\circ$, 且 $|f^k - f^\circ|_{V^\circ} \to 0$, $k \to +\infty$, 则存在 k° 使得当 $k \geqslant k^\circ$ 时系统在 $[\sigma^k - r, b]$ 上存在过 $(\sigma^\circ, \Phi^\circ)$, 且在 $[\sigma^\circ - r, b]$ 上的解 $x^k(t)$ 一致收敛于 x°. 由于 x^k 可能不是定义在 $[\sigma^\circ - r, b]$ 上, 对于解 $x^k(t)$ 在 $[\sigma^\circ - r, b]$ 一致收敛于 x° 可以理解为对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $k_1(\varepsilon)$ 使得对于 $k \geqslant k_1(\varepsilon)$ 的所有的 $x^k(t)$ 在 $[\sigma^\circ - r + \varepsilon, b]$ 上存在, 且在 $[\sigma^\circ - r + \varepsilon, b]$ 一致收敛于 $x^\circ(t)$.

定理 1.2.11 设 $f \in C^*(R \times PC([-\tau, 0], R), R)$, 且对任意 (t_0, ω, Φ), 系统 (1.2.61) 具有唯一解 $x(t, t_0, \omega, \Phi)$, $t \in (t_0, \omega(t_0, \omega, \Phi)$, 则

(1) $\Omega : t_0 < t < \omega(t_0, \omega, \Phi)$, $(t_0, \omega, \Phi) \in (R \times R \times PC([-\tau, 0], R), R)$ 是一区域;

(2) $x(t, t_0, \omega, \Phi)$ 关于 (t_0, ω, Φ) 是连续的, $t \neq t_k$, $k = 1, 2, \cdots$.

证明 对任意的 $(t', t_0', \omega', \Phi') \in \Omega$, $t' \neq t_k$, $k = 1, 2, \cdots$. 不妨设 $t' \in (t_0', t_1]$, 取 $[a, b] \subseteq (t_0', t_1)$. 由上引理知只要 (t_0, ω, Φ) 与 (t_0', ω', Φ') 充分靠近, 过 (t_0, ω, Φ) 的解 $x(t, t_0, \omega, \Phi)$ 在 $[a, b]$ 上一定存在. 又由于 $\{(t_0, \omega, \Phi) \in R \times R \times PC([-\tau, 0], R)\}$ 是区域, 易见 Ω 是区域.

对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta' > 0$, 使得当 $|t_0' - t_0| < \delta'$, $|\omega' - \omega| < \delta'$, $\|\Phi' - \Phi\| < \delta'$ 时, 对任意 $t \in [a, b]$, 都有

$$|x(t, t_0, \omega, \Phi) - x(t, t_0', \omega', \Phi')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $x(t, t_0', \omega', \Phi')$ 在 t' 连续, 取 $\delta'' > 0$, 使得当 $|t - t'| < \delta''$ 时, 有

$$|x(t, t_0', \omega', \Phi') - x(t', t_0', \omega', \Phi')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, 则 $|t - t'| < \delta$, $|t_0' - t_0| < \delta$, $|\omega' - \omega| < \delta$, $\|\Phi' - \Phi\| < \delta$ 时

$$|x(t', t_0', \omega', \Phi') - x(t, t_0, \omega, \Phi)| < \varepsilon.$$

□

定理 1.2.12 设 $f \in C^*(R \times PC((-\infty, 0], R), R)$, 且对任意 (t_0, ω, Φ), 系统 (1.2.61) 具有唯一解 $x(t, t_0, \omega, \Phi)$, $t \in (t_0, \omega(t_0, \omega, \Phi)$, 则

(1) $\Omega : t_0 < t < \omega(t_0, \omega, \Phi)$, $(t_0, \omega, \Phi) \in (R \times R \times PC((-\infty, 0], R), R)$ 是一区域;

(2) $x(t, t_0, \omega, \Phi)$ 关于 (t_0, ω, Φ) 是连续的, $t \neq t_k$, $k = 1, 2, \cdots$.

证明 对任意的 $(t', t_0', \omega, \Phi') \in \Omega$, $t' \neq t_k$, $k = 1, 2, \cdots$. 不妨设 $t' \in (t_0', t_1]$, 取 $[a, b] \subseteq (t_0', t_1)$, 由上引理知只要 (t_0, ω, Φ) 与 (t_0', ω', Φ') 充分靠近, 过 (t_0, ω, Φ) 的解 $x(t, t_0, \omega, \Phi)$ 在 $[a, b]$ 上一定存在. 又由于 $\{(t_0, \omega, \Phi) \in R \times R \times PC((-\infty, 0], R)\}$ 是区域, 易见 Ω 是区域.

对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta' > 0$, 使得当 $|t_0' - t_0| < \delta'$, $|\omega' - \omega| < \delta'$, $\|\Phi' - \Phi\| < \delta'$ 时, 对任意 $t \in [a, b]$, 都有

$$|x(t, t_0, \omega, \Phi) - x(t, t_0', \omega', \Phi')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $x(t, t_0', \omega', \Phi')$ 在 t' 连续, 取 $\delta'' > 0$, 使得当 $|t - t'| < \delta''$ 时, 有

$$|x(t, t_0', \omega', \Phi') - x(t', t_0', \omega', \Phi')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, 则 $|t - t'| < \delta$, $|t_0' - t_0| < \delta$, $|\omega' - \omega| < \delta$, $\|\Phi' - \Phi\| < \delta$ 时,

$$|x(t', t_0', \omega', \Phi') - x(t, t_0, \omega, \Phi)| < \varepsilon. \qquad \square$$

注 1.2.4 本部分内容有待于继续完善.

附 注

在 §1.1 中, 引理 1.1.1~1.1.8 来自于 [14], [11]. 引理 1.1.9 和定理 1.1.4, 1.1.6 引自 [5] 和 [4]. 定义 2.2.1 和定理 2.2.1~2.2.3,2.3.4 来自 [10]. 定理 2.2.4 出之 [9], 其中还参照了文献 [1] 的证明.

在 §1.2 中, 引理 3.1.1~3.1.4 引自 [3]. 定理 3.1.1~3.1.5 选自 [8], [13] 及 [2]. 定理 3.2.1~3.2.5 为作者待发表内容, 其中还参照了文献 [7] 的证明.

参考文献

1 D D Bainov, P S Simeonov. Impulsive Differential Equations. World scientific, Singaporre, 1995

2 George Ballinger, Xinzhi Liu. Existence, uniqueness results for impulsive delay differential equations. Applicable Analysis, 2000, 74: 71~93

3 O diekmann et. al., Delay Equations: New York: Springer-Verlag. 1994

4 郭大钧. 非线性分析中的半序方法. 济南: 山东科技出版社. 1997

5 郭大钧, 孙经先, 刘兆理. 非线性常微分方程泛函方法. 济南: 山东科技出版社. 1995

6 J K Hale. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag. 1977
7 Xilin Fu, Baoqiang Yan. The global solutions of impulsive functional differential equations in Banach spaces. Nonlinear Studies, 2000, 1(1): 1~17
8 Xilin Fu, Baoqiang Yan. The global solutions of impulsive retarded functional differential equations. International Journal of Applied Mathematics, 2000, 3: 389~363
9 Saroop Kaul. On the existence of extremel solutions for impulsive differential equations with varialble time. Nonlinear Analysis, 25(4): 345~362
10 V Lakshmikantham, D D Bainov, P S Simeonov. Theory of Impulsive Differential Equations. World scientific, Singaporre, 1989
11 王柔怀, 伍卓群. 常微分方程讲义. 北京: 人民教育出版社. 1963
12 闫宝强, 傅希林. 具有无限时滞脉冲泛函微分方程解的存在性. 中国学术期刊文摘, 1999
13 Baoqiang Yan, Xilin Fu. Monotone iterative technique for impulsive delay differential equations. Pro. Indian Acad. Sci (Math.Sci), 2001, 111(2): 75~87
14 尤秉礼. 常微分方程补充教程. 北京: 高等教育出版社. 1981
15 V D Mil'man, A D Myshkis. On the stability of motion in Nonlinear Mechanics. Sib. Math. J., 1960, 233~237
16 Dajun Guo. Boundary value problems for impulsive integro-differential equations on unbounded domains in a Banach space. Appl. Math. Comput., 1999, 99: 1~15
17 Dajun Guo. Second order impulsive integro-differential equations on unbounded domains in Banach spaces. Nonlinear Anal., 1999, 35: 413~423
18 D D Bainov, S I Kostadinov. Abstract Impulsive Differential Equations. Japan: Descartes Press CO.Koriyama, 1996
19 A M Samoolenko, N A Perestyuk. Differential Equations with Impulse Effect. Russia: Višča Škola, 1987
20 S I Kostadinov. On a theorem of equations with impulses. Sci. Proc. Plovdiv Univ., 1985, 23

第 2 章　脉冲微分自治系统的几何理论

由于脉冲的存在，导致脉冲微分系统的解的性质出现某些本质性的变化. 如不含脉冲的一维纯量自治微分系统 $x' = f(t, x)$, 当系统右端恒正或恒负时，该系统必无周期解；但若具有脉冲的作用，就可能产生周期解. 从几何理论的角度来看，就是脉冲可能导致相图拓扑结构的本质变化. 揭示在脉冲作用下，系统解的性质产生的本质变化，探讨脉冲对系统解的拓扑结构的规律与特征，是脉冲微分系统研究的重要课题. 文献 [1] 和 [2] 首次研究了具有固定时刻脉冲的一维自治系统闭轨的存在性，这属于脉冲微分系统几何理论的初始研究成果. 就整体而言，关于脉冲微分系统几何理论的研究尚处于起步阶段. 本章阐述脉冲微分系统几何理论的基本结果. 2.1 节研究具有固定时刻脉冲的一维自治系统周期解的存在性. 利用含有脉冲的积分函数的新方法给出了系统存在周期解的若干充要条件. 2.2 节考虑具有依赖于状态脉冲的微分系统极限环的存在性，得到了极限环的存在性充要条件. 2.3 节研究带有参数的具固定时刻脉冲的一维自治系统的奇点类型与分类，得到了其仅有的四种类型. 2.4 节考虑分枝问题，对 2.3 节中给出的每种类型奇点都建立了产生分枝的判别准则. 需指出的是，这些判别准则都是充要条件.

§2.1　固定时刻脉冲微分自治系统的周期解

本节的目的是研究具有固定时刻脉冲的一维自治系统周期解的存在性. 首先我们建立了这类脉冲系统周期解的概念，然后给出了周期解存在的判别准则. 值得注意的是这些准则都是充要条件.

鉴于脉冲导致解的不连续性，我们采用一种新的方法 —— 含有脉冲的积分函数方法，即通过建立一个变限积分函数 (特点是被积函数与方程有关，积分限与脉冲有关)，将周期解的存在性化为这类含有脉冲的积分函数的零点问题.

考虑脉冲自治系统

$$
\text{(I)} \qquad \begin{cases} x' = f(x), & t \neq t_i, \\ \Delta x|_{t=t_i} = I_i(x), & i = 1, 2, \cdots, \\ x(t_0 + 0) = x_0 + I_0(x_0), \end{cases}
$$

这里 $\Delta x|_{t=t_i} = x(t_i + 0) - x(t_i), 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_i < \cdots$ 且 $\lim\limits_{i \to +\infty} t_i = +\infty$. 本节总设系统 (I) 的解是整体存在唯一的. 系统 (I) 的基本理论可参阅 [1].

定义 2.1.1　设 $x(t,x_0)$ 为系统 (I) 的解.

(i) 若存在 $T>0$, 使得对任意 $t\geqslant 0$ 有 $x((t+T)\pm 0,x_0)=x(t\pm 0,x_0)$, 则称 $x(t,x_0)$ 为系统 (I) 的一个周期解.

(ii) 若 $x(t,x_0)$ 为系统 (I) 的一个非平凡周期解，称其轨道 $\{x(t\pm 0,x_0):t\geqslant 0\}$ 为系统 (I) 的一个周期闭轨，简称闭轨.

(iii) 称集合 $\{y:$ 存在 $s_k>0,\lim\limits_{k\to+\infty}s_k=+\infty$ 且 $\lim\limits_{k\to+\infty}x(s_k+0,x_0)=y$ 或 $\lim\limits_{k\to+\infty}x(s_k-0,x_0)=y\}$ 为 $x(t,x_0)$ 的极限点集合，记为 $\omega(x_0)$.

(iv) 称系统 (I) 的某一闭轨为吸引的，若存在区间 (a,b), 使得对任意的 $x_0\in(a,b)$, 系统 (I) 的解 $x(t,x_0)$ 的极限点集合为该闭轨. 否则称为不吸引的，特别在吸引的情况下，$(a,b)=R^+(R^-)$ 时，称该闭轨在 $R^+(R^-)$ 上为全局吸引的.

注 2.1.1　由于本文考虑的仅是一维脉冲微分系统，从而闭轨是一个 x 轴上的闭区间.

本节仅仅考虑 $t_i=i\tau,I_i(x)=I(x),i=1,2,\cdots,\tau>0$ 的情况，即

$$\text{(II)}\qquad\begin{cases}x'=f(x), & t\neq i\tau,\\ \Delta x|_{t=t_i}=I(x), & t_i=i\tau,i=1,2,\cdots,\\ x(0+0)=x_0+I(x_0),\end{cases}$$

并假设

(H_1) $f(0)=0,f(x)\neq 0,x\in R-\{0\},f\in C(R)$;

(H_2) $I(0)=0,h(x)=x+I(x),h\in C(R)$ 是 R 上的递减函数且 $xh(x)<0$.

由于总假设系统 (II) 的解整体存在唯一，容易证明对任意 $x\neq 0$, 存在唯一的 $y\in R$, 满足

$$yh(x)>0,\qquad \int_{h(x)}^{y}\frac{1}{f(x)}ds=\tau. \tag{2.1.1}$$

因此可以将这个对应关系定义为 $y=F(x)(x\neq 0)$. 同时令

$$G(x)=F\circ F(x)-x,\qquad x\neq 0. \tag{2.1.2}$$

利用 $F(x),G(x)$ 的性质可建立本节的主要结果.

首先，我们给出系统 (II) 周期解的有关性质. 本节总假设条件 $(\mathrm{H}_1),(\mathrm{H}_2)$ 成立.

引理 2.1.1　若 $x(t,x_0)(x_0>0)$ 是系统 (II) 的周期解, 则必有 $T=m_0\tau$ $(m_0\in\mathbf{N})$ 是 $x(t,x_0)$ 的一个周期.

证明　记 $x(t)=x(t,x_0)$, 若 $x(t)\equiv\mathrm{const}$, 那么引理 2.1.1 的结论显然成立. 而当 $x(t)$ 是系统 (II) 的非常数周期解时, 由一阶自治常微方程的性质知，$I(x(i\tau))(i\geqslant 0)$

不全为零. 否则 $x(t)$ 为 $x'(t)=f(x(t))$ 在 $[0,+\infty)$ 上的一个非平凡周期解, 显然这是不可能的.

从而当 $x(t)\neq$const, 时令 $T>0$ 为其周期, 选取 $k_0\geqslant 0$, 使得 $I(x(k_0\tau))\neq 0$, 那么由周期解的定义知

$$x[(k_0\tau+T)\pm 0]=x(k_0\tau\pm 0).$$

则有

$$\begin{aligned}x[(k_0\tau+T)+0]&=x(k_0\tau)+I(x(k_0\tau))\\&=x(k_0\tau+T)+I[x(k_0\tau+T)]\end{aligned}$$

且

$$I[x(k_0\tau+T)]=I[x(k_0\tau)]\neq 0.$$

上式说明 $k_0\tau+T$ 仍是系统 (II) 的脉冲时刻, 即存在 $n_0>k_0$, 使得 $k_0\tau+T=n_0\tau$, 从而 $T=m_0\tau(m_0=n_0-k_0)$. □

引理 2.1.2 系统 (II) 的解是以 2τ 为最小正周期解的充要条件是 $F\circ F(x)$ 有不动点, 或 $G(x)$ 有零点.

证明 充分性 设 $x_0=F\circ F(x_0)(x_0\neq 0)$, 则由 $F(x)$ 的定义知

$$\int_{h(F(x_0))}^{x_0}\frac{1}{f(s)}ds=\tau.$$

又 $x(t,x_0)$ 为系统 (II) 的解, 故

$$\int_{h(x_0)}^{x(\tau)}\frac{1}{f(s)}ds=\tau,\qquad \int_{h(x(\tau))}^{x(2\tau)}\frac{1}{f(s)}ds=\tau, \tag{2.1.3}$$

即

$$x(\tau)=F(x_0),\qquad x(2\tau)=F(x(\tau))=F\circ F(x_0)=x_0.$$

同理可证对 $\forall k\geqslant 0, x(2k\tau)=x_0, x[(2k+1)\tau]=x(\tau)$.

由常微分方程的基本理论可证明 $x(t+2\tau)=x(t),\forall t\geqslant 0$.

必要性 设系统 (II) 的解 $x(t)=x(t,x_0)$ 是以 2τ 为最小正周期的解, 由 (2.1.3) 可知

$$x_0=x(0)=x(2\tau)=F(x(\tau))=F\circ F(x_0),$$

即 x_0 为 $F\circ F(x)$ 的不动点. □

引理 2.1.3　$F\circ F(x)$ 是 x 的单增函数，即

$$F\circ F(x_1)\geqslant F\circ F(x_2),\qquad \forall x_1\geqslant x_2,\ x_1,x_2\neq 0.$$

证明　只需证明 $F(x)$ 是 x 的单减函数. 任取 $x_1,x_2\in R$ 且 $x_1,x_2\neq 0,x_1>x_2$.

若 $x_1>0>x_2$, 由 $h(x)$ 的定义及条件知，$h(x_1)<0<h(x_2)$. 因为 $F(x)\cdot h(x)>0$, 则 $F(x_1)<0<F(x_2)$.

若 $x_1>x_2>0$, 则$h(x_1)\leqslant h(x_2)<0$.由$F(x)$ 的定义知

$$\int_{h(x_1)}^{F(x_1)}\frac{1}{f(s)}ds=\int_{h(x_2)}^{F(x_2)}\frac{1}{f(s)}ds=\tau,$$

即

$$\int_{F(x_2)}^{F(x_1)}\frac{1}{f(s)}ds=\int_{h(x_2)}^{h(x_2)}\frac{1}{f(s)}ds.\tag{2.1.4}$$

注意到 $F(x_k)\cdot h(x_k)>0$, 从而由$f(x)$的条件知$f(x)$在区间$[F(x_1),F(x_2)]$ (或 $[F(x_2),F(x_1)]$) 和 $[h(x_1),h(x_2)]$ 上是同号的，则由 (2.1.4) 知 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$. □

引理 2.1.4　(II) 的任何周期解均是以 2τ 为最小正周期解的.

证明　下面分三步完成本结论的证明.

(i) 任何周期解不以 τ 为周期. 设 $x(t)=x(t,x_0)$ 为 (II) 的解, 则有 $\int_{h(x_0)}^{x(\tau)}\frac{1}{f(s)}ds=\tau$. 由 $h(x)$ 的条件知 $x_0h(x_0)<0$, 从而 $x(\tau)x_0<0$, 即$x(\tau)\neq x_0$.

(ii) 任何周期解的周期必是 $2m_0\tau, m_0$ 为正整数. 设 $x(t)=x(t,x_0)$ 为 (II) 的周期解，由引理 2.1.1 知，其周期解 $T=n_0\tau$. 下证 $n_0=2m_0$. 由 (i) 的证明可以看出 $x[(k+1)\tau]\cdot x(k\tau)<0$, 从而 $x[(2k+1)\tau]\cdot x(0)<0$. 由于$x(n_0\tau)=x(0)$,若$n_0=2m_0+1$,则$x[(2m_0+1)\tau]\cdot x(0)<0$,从而$x^2(0)<0$, 矛盾.

(iii) 任何周期解必以 2τ 为周期. 由 (i),(ii) 的证明可设解 $x(t)$ 的周期为 $2m_0\tau$, 记

$$x_k=x(k\tau),\qquad x_k^+=h(x_k),\tag{2.1.5}$$

则由$F(x)$及$G(x)$的定义知

$$x_2=F\circ F(x_0)\Rightarrow x_2-x_0=F\circ F(x_0)-x_0=G(x_0),$$

$$\vdots$$

$$x_{2m_0}=F\circ F(x_{2m_0-2})\Rightarrow x_{2m_0}-x_{2m_0-2}=G(x_{2m_0-2}).\tag{2.1.6}$$

由于 $x_{2m_0}=x_0$, 将 (2.1.6) 依次相加得 $0=\sum\limits_{i=0}^{m_0-1}G(x_{2i})$.

下证 $G(x_{2k})=0(0\leqslant k\leqslant m_0-1)$.

若不然，必存在 $0 \leqslant i \leqslant m_0 - 1$, 使得 $G(x_{2i}) \cdot G(x_{2i+2}) < 0$. 事实上，若对 $\forall 0 \leqslant k \leqslant m_0 - 1, G(x_{2k}) \neq 0$, 则上述论断成立.若存在$k_0, 0 < k_0 \leqslant m_0 - 1$, 使得$G(x_{2k_0}) = 0$, 则对$\forall k_0 \leqslant k \leqslant m_0 - 1$,

$$x_{2k} = x_{2k_0} \Rightarrow G(x_{2k}) = 0,$$

从而将 $\sum_{i=0}^{m_0-1} G(x_{2i}) = 0$ 中的 m_0以k_0 代替并不影响下面的讨论.

因为 $x_{2i} \cdot x_{2i+2} > 0$, 结合 $G(x)$ 的连续性知，存在 η 介于 x_{2i} 与 x_{2i+2}, 使得 $G(\eta) = 0$, 即 $\eta = F \circ F(\eta)$. 注意到 $x_{2i+2} = F \circ F(x_{2i})$, 利用引理 2.1.3 知

$$(x_{2i} - \eta)(x_{2i+2-\eta}) = (x_{2i} - \eta)[F \circ F(x_{2i}) - F \circ F(\eta)] \geqslant 0.$$

由于 $x_{2i}, x_{2i+2} \neq \eta$(否则与$G(x_{2i})G(x_{2i+2}) < 0$矛盾), 从而要么 $x_{2i}, x_{2i+2} > \eta$, 要么 $x_{2i}, x_{2i+2} < \eta$, 矛盾. □

由引理 2.1.1~2.1.4 可得到本节的主要结果.

定理 2.1.1

(i) (II) 存在周期解的充要条件是 $G(x)$ 有零点;

(ii) (II) 的任何周期解均以 2τ 为最小正周期.

定理 2.1.2 假设 $(\mathrm{H}_1), (\mathrm{H}_2)$ 成立，则 (II) 的解 $x(t, K_0)$ 所确定的轨道是吸引闭轨的充要条件是

$$\lim_{x \to K_0} \operatorname{sgn}[G(x)(x - K_0)] = -1, \tag{2.1.7}$$

其中 $\operatorname{sgn}(x)$ 为符号函数.

证明 **充分性** 若 (2.1.7) 成立，则存在 $\delta > 0$ 满足 $G(x)(x - K_0) < 0, x \in (K_0 - \delta, K_0) \bigcup (K_0, K_0 + \delta)$, 从而 $G(K_0) = 0$. 由定理 2.1.1 知 $x(t, x_0)$ 为 (II) 的一个闭轨. 下证其轨道是吸引的.

任取 $x_0 \in \bigcup^{\circ}(K_0, \delta)$, 考虑 (1.2) 的解 $x(t) = x(t, x_0)$. 由 (2.1.3),(2.1.5) 可知 $x_{2k+2} = F \circ F(x_{2k}) (k \geqslant 0)$. 不妨设 $x_0 \geqslant K_0$, 则有

$$x_2 - x_0 = F \circ F(x_0) - x_0 = G(x_0) < 0 \Rightarrow x_2 < x_0.$$

再利用引理 2.1.3 知 $x_2 > K_0$, 从而 $K_0 < x_2 < x_0$. 同理可证 $K_0 < x_{2k+2} < x_{2k} (k \geqslant 0)$. 这样 $\{x_{2k}\}$ 为递减有下界数列. 在 $x_{2k+2} = F \circ F(x_{2k})$ 中令 $k \to +\infty$ 知

$$x^* = \lim_{k \to +\infty} x_{2k+2} = F \circ F(x^*) \Rightarrow G(x^*) = 0.$$

由 $G(x)$ 在 $[K_0, K_0 + \delta)$ 上零点的唯一性知 $x^* = K_0$. 同理可证 $x_* = \lim_{k \to +\infty} x_{2k+1} = F(K_0) = K_0$.

下证对 $\forall x_0 \in (K_0-\delta, K_0+\delta), \omega(x_0)=\omega(K_0)$.

(i) 先证 $\omega(x_0) \subset \omega(K_0)$. 对 $\forall y \in \omega(x_0)$, 由 $\omega(x_0)$ 的定义知，存在 $s_n \to +\infty$, 使得

$$y=\lim_{n\to+\infty} x(s_n+0) \quad 或 \quad y=\lim_{n\to+\infty} x(s_n-0).$$

不失一般性，设 $y=\lim\limits_{n\to+\infty} x(s_n+0)$, 并选取 s_n 的一子列适合 $s_n=2k_n\tau+t_n$ 或 $s_n=2k_n\tau+\tau+t_n(0\leqslant t_n<\tau)$. 仍不失一般性，设 $s_n=2k_n\tau+t_n$, 注意到

$$\int_{x(2k_n\tau+0)}^{x(s_n+0)} \frac{1}{f(s)}ds=t_n \Rightarrow \int_{h(x_{2k_n})}^{x(s_n+0)} \frac{1}{f(s)}ds=t_n.$$

在上式中令 $n\to+\infty$ 知

$$\int_{h(K_0)}^{y} \frac{1}{f(s)}ds=t^*, \qquad t^*=\lim_{n\to+\infty} t_n.$$

若 $t^*=0$ 或 τ, 易知 $y=h(K_0)$ 或 $y=F(K_0)\in\omega(K_0)$. 若 $t^*\in(0,\tau)$, 由于

$$\int_{h(K_0)}^{x(t^*,K_0)} \frac{1}{f(s)}ds=t^*,$$

则 $y=x(t^*,K_0)\in\omega(K_0)$.

(ii) 再证 $\omega(K_0)\subset\omega(x_0)$. 对 $\forall y\in\omega(K_0)$,若$y=K_0$或$y=h(K_0)$, 注意到 $x_{2k}\to K_0, h(x_{2k})\to h(K_0)$, 则此时必有 $y\in\omega(x_0)$. 若 $y=x(t_0,K_0)(t_0\in(0,\tau)\cup(\tau,2\tau))$. 不妨设 $t_0\in(0,\tau)$, 取 $s_n=2k\tau+t_0$, 则容易证明 $x(s_n,x_0)\to y(n\to+\infty)$, 即 $y\in\omega(x_0)$.

必要性 由定理 2.1.1 知，此时显然应有 $G(K_0)=0$. 容易看出 $G(x)$ 在 K_0 某个邻域上的零点仅有 K_0, 否则利用定理 2.1.1 及 $\omega(K_0)$ 的吸引性可推出矛盾. 下证存在 K_0 的邻域 $\cup^\circ(K_0)$ 使得

$$G(x)(x-K_0)<0, \qquad x\in\cup^\circ(K_0). \tag{2.1.8}$$

若 (2.1.8) 不成立，由于 $G(x)$ 在 $\cup^\circ(K_0)$ 上无零点，不妨设 $G(x)>0, x\in(K_0,K_0+\delta)(\delta>0)$. 令

$$\bar\delta=:\sup\{\delta: G(x)>0, x\in(K_0,K_0+\delta)\}.$$

若 $\bar\delta<+\infty$, 则 $G(K_0+\bar\delta)=0$ 对 $\forall x_0\in(K_0,K_0+\bar\delta)$ 成立. 由 (2.1.5) 中 x_k 的定义知 $x_{2k+2}=F\circ F(x_{2k})(k\geqslant0)$. 因为 $G(x)>0, x\in(K_0,K_0+\bar\delta)$, 则

$$x_2-x_0=G(x_0)>0\Rightarrow x_2>x_0.$$

再由引理 2.1.3 及 $G(K_0+\bar{\delta})=0$ 知 $x_2<K_0+\bar{\delta}$. 重复上述证明过程可知

$$K_0+\bar{\delta}>x_{2k+2}>x_{2k}>x_0. \tag{2.1.9}$$

若 $\bar{\delta}=+\infty$, 同理可证 (2.1.9) 成立，这显然与 $\omega(K_0)$ 是吸引的相矛盾. □

类似可得下面关于闭轨在 R^+ 或 R^- 上全局吸引的结论.

定理 2.1.3 设 $K_0>0$, 则 (II) 的轨道在 R^+ 上全局吸引的充要条件是

$$G(x)(x-K_0)<0, \qquad x\in(0,+\infty).$$

定理 2.1.4 (i) 若 $x(t,K_0)$ 是 (II) 的吸引闭轨，则 $x(t,h(K_0))$ 也是 (II) 的吸引闭轨.

(ii) 若 $x(t,K_0)$ 是 (II) 的在 R^+(或 R^-) 上的全局吸引闭轨，则 $x(t,h(K_0))$ 也是 (II) 的在 R^-(或 R^+) 上的全局吸引闭轨.

§2.2 具依赖状态的脉冲微分系统极限环的存在性

2.1 节研究了具固定时刻脉冲的自治系统周期解存在性，并给出了充要条件. 本节我们要研究具依赖状态脉冲的微分系统的定性理论. 首先给出这类系统极限环的定义，然后对这类系统极限环的存在性给出若干定理. 我们还借助一个特殊的积分限含有脉冲的积分函数得到了极限环存在的充要条件.

令 $R=(-\infty,+\infty), R^+=(0,\infty)$. 我们考虑如下具有依赖状态的脉冲微分系统:

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} x'=f(x), & t\neq\tau_k(x), t>0, \qquad (2.2.1)\\ \Delta_k x(t)=I_k(x), & t=\tau_k(x), k=1,2,\cdots,\\ x(0)=x_0, & \qquad (2.2.2)\end{cases}$$

其中 $x:R^+\to R, f\in C[R,R]$, 当 $t_k=\tau_k(x(t_k))$ 时，$\Delta_k x(t)=x(t_k^+)-x(t_k)$; $\tau_k(x)$ 有界，且 $\tau_1(x)<\tau_2(x)<\cdots<\tau_k(x)<\cdots, k=1,2,\cdots$; 当 $k\to\infty$ 时，$\tau_k\to\infty$ 关于 $x\in R$ 一致成立.

假设 $f(x)$ 和 $I_K(x)(k\geqslant 1)$ 满足适当的条件，以使得对任意 $x_0\in R$ 系统 (I) 的解在 $[0,+\infty)$ 上存在且唯一，进一步假设:

(i) $\tau_k'(x)f(x)\leqslant\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant 1), \forall x\in R$;

(ii) $x_1+I_k(x_1)\neq x_2+I_k(x_2), x_1\neq x_2\in R(k\geqslant 1)$.

记 $x(t,x_0)$ 是系统 (I) 的满足 $x(0)=x_0$ 的解，并在 t_k 时刻与脉冲面 $S_k:t=\tau_k(x)$ 相撞，记 $x_k=x(t_k,x_0), x_k^+=x(t_k+0,x_0), x(t)=x(t,x_0)$.

定义 2.2.1 称 $x(t)$ 是 (I) 的周期轨道，如果存在 $T_0>0$, 使得

$$x[(t_0+T_0)\pm 0]=x(t_0\pm 0),\qquad \forall t\geqslant t_1,$$

其中 $x(t_0\pm 0)$ 是 $x(t)$ 在 $t=t_0$ 的左右极限值.

定义 2.2.2 设 $\bar{x}(t,\bar{x}_0)$ 是系统 (I) 的周期轨道，我们称

(i) $\bar{x}(t,\bar{x}_0)$ 是 $x(t,x_0)$ 的极限轨道，如果对任意的 $t>\bar{t}_1$, 存在 $\{t^j\},t^j\to\infty(j\to\infty)$, $\lim\limits_{j\to\infty}x(t^j\pm 0,x_0)=\bar{x}(t\pm 0,\bar{x}_0)$.

(ii) $\bar{x}(t,\bar{x}_0)$ 是系统 (I) 的稳定极限环，如果存在开区间 (M_1,M_2), 使得对任意的 $x_0\in(M_1,M_2),\bar{x}(t,\bar{x}_0)$ 是 $x(t,x_0)$ 的极限轨道.

(iii) $\bar{x}(t,\bar{x}_0)$ 是系统 (I) 的右稳定 (左稳定) 极限环，如果存在区间 $[\bar{x}_0,M_2)((M_1,\bar{x}_0])$, 使得对任意的 $x_0\in[\bar{x}_0,M_2)((M_1,\bar{x}_0]),\bar{x}(t,\bar{x}_0)$ 是 $x(t,x_0)$ 的极限轨道.

(iv) $\bar{x}(t,\bar{x}_0)$ 是不稳定的极限环，如果存在 $\delta>0$, 对任意的 $x_0\in\cup^0(\bar{x}_0,\delta)$, 有 $\bar{x}(t,\bar{x}_0)$ 不是 $x(t,x_0)$ 的极限轨道.

在给出系统 (I) 的定性结果之前，我们先作如下限定：

$(\mathrm{H}_1)\tau_K'(x)f(x)\leqslant\alpha(0\leqslant\alpha<1),k\geqslant 1,x\in R^+$.

$(\mathrm{H}_2)I_k(x)\equiv I(x),\tau_k(x)=kT+\tau(x)(k=1,2,\cdots)$, 其中 $T>0,T+\tau(x)>0(x\in R^+),I\in C[[0,\infty),R],\tau\in C^1[[0,\infty),R]$.

$(\mathrm{H}_3)f(0)=0,f(x)<0,x\in R^+$.

$(\mathrm{H}_4)I(0)=0,x+I(x)$ 是 R^+ 上的单调递增函数.

$(\mathrm{H}_5)\tau(x+I(x))-\tau(x)$ 是 R^+ 上的单调不增函数.

注 2.2.1 尽管我们限定 $f:[0,\infty)\to(-\infty,0)$, 但是对于更一般的情况 $xf(x)>0$ 或者 $xf(x)<0(x\neq 0)$ 并且 $f(0)=0$, 我们也可以经过与本节类似的讨论，得到相似的结果.

定义 2.2.3 对任意 $x\in R^+$, 令

$$F(x)=\int_c^x\frac{1}{f(x)}ds\quad(c>0\text{为固定常数}),\tag{2.2.3}$$

$$G(x)=T+F(x+I(x))-F(x)=T+\int_x^{x+I(x)}\frac{1}{f(x)}ds.\tag{2.2.4}$$

易知在条件 $(\mathrm{H}_3),(\mathrm{H}_4)$ 下， $F(x),G(x)$ 在 R^+ 上有定义. 记

$$H(K,x)=F(K)-F(x)-T-\tau(K),\tag{2.2.5}$$

$$H_0=\{K|H(K,x)\text{在}R^+\text{上有零点}\},\tag{2.2.6}$$

$$G_0=\{\bar{K}|G(\bar{K})=0\},\tag{2.2.7}$$

$$\Omega = G_0 \cap H_0, \tag{2.2.8}$$

$$\Omega_+ = \left\{ \bar{K} \in \Omega \left| \lim_{x \to \bar{K}+0} \operatorname{sgn}[G(x)] = 1 \right. \right\}, \tag{2.2.9}$$

$$\Omega_- = \left\{ \bar{K} \in \Omega \left| \lim_{x \to \bar{K}-0} \operatorname{sgn}[G(x)] = -1 \right. \right\}, \tag{2.2.10}$$

$$\Omega_l = \Omega_+ \cap \Omega_-. \tag{2.2.11}$$

注 2.2.2 对任意的 $K \in H_0$, 由 $f(x)$ 的正性可知 $H(K, x)$ 的零点 x_0 是唯一的. 在下面的讨论中，我们假设 $(\mathrm{H}_1) \sim (\mathrm{H}_5)$ 总成立.

引理 2.2.1 若 $x(t, x_0)$ 是系统 (I) 的周期为 $T_0 > 0$ 的闭轨，则 $T_0/T \in \mathbf{N}$.

证明 由定义 2.2.1 知，对任意的 $t \geqslant t_1$, 有

$$x[(t+T_0) \pm 0, x_0] = x(t \pm 0, x_0), \qquad \text{或 } x[(t+T_0) \pm 0] = x(t \pm 0).$$

令 $t = t_1 = T + \tau(x_1)$, 因为

$$\begin{aligned} x[(t_1+T_0)-0] &= x(t_1+T_0) = x(t_1-0) = x(t_1) = x_1, \\ x[(t_1+T_0)+0] &= x(t_1+0) = x_1^+ \end{aligned}$$

且

$$x_1^+ = x_1 + I(x_1),$$

所以

$$x[(t_1+T_0)+0] = x(t_1+T_0) + I[x(t_1+T_0)]. \tag{2.2.12}$$

从而知点 $(t_1+T_0, x(t_1+T_0))$ 在某个脉冲面 $S_k : t = \tau(x)(k>1)$ 上，即

$$t_1 + T_0 = \tau_k(x(t_1+T_0)) = \tau_k(x_1) = kT + \tau(x_1),$$

则 $T_0 = kT + \tau(x_1) - t_1 = kT + \tau(x_1) - T - \tau(x_1) = (k-1)T$. □

引理 2.2.2 对任意的 $x, y \in R^+$,

$$x > y \Leftrightarrow F(x) - F(y) < \tau(x) - \tau(y).$$

证明 因为 $F(x) - F(y) = \int_y^x (1/f(s))ds$, 注意到 (H_1), 有

$(\Rightarrow) F(x) - F(y) = \int_y^x (1/f(s)) < \int_y^x \tau'(s)ds = \tau(x) - \tau(y)(x > y)$.

$(\Leftarrow)$假定$x \leqslant y, F(x) - F(y) = \int_x^y -(1/f(s))ds \geqslant \int_x^y -\tau'(s)ds = \tau(x) - \tau(y)$, 矛盾. □

引理 2.2.3 (i) $H_0 = (0, \bar{H})$, 其中 $\bar{H} = \sup H_0$($\bar{H}$ 可以取无穷); (ii) 对任意 $\{K_n\} \subset G_0$, 且 $K_n \to \bar{K} \in \Omega(n \to \infty)$, 存在 $N_0 > 0, K_n \in \Omega(n \geqslant N_0)$.

证明 (i) 假设 $K < \bar{H}$, 由 $\bar{H}$ 的定义, 存在 $\bar{K} \in H_0, K < \bar{K}$. 设 $\bar{x}_0$ 是 $H(\bar{K}, x)$ 在 R^+ 上的零点. 因为 $H(K,K) = -T - \tau(K) < 0$, 由引理 2.2.2 及 $K < \bar{K}$ 知, $H(K,\bar{x}_0) = H(K,\bar{x}_0) - H(\bar{K},\bar{x}_0) = F(K) - F(\bar{K}) - [\tau(K) - \tau(\bar{K})] > 0$. 这样 $K \in H_0$. 由 $H(K,x)$ 的连续性易知 $\bar{H} \bar{\in} H_0$, 从而 $H_0 = (0, \bar{H})$.

(ii) 只需证明对充分大的 n 有 $K_n \in H_0$. 事实上, H_0 是开集, 且 $K_n \to \bar{K} \in H_0, n \to \infty$,(ii) 的结论成立. □

引理 2.2.4 设 $x(t, x_0)$ 是系统 (I) 的最小正周期是 $T_0 > 0$ 的闭轨, 则 $T_0 = T$.

证明 由引理 2.2.1 的结果知存在 $m \in N$, 使得 $T_0 = mt$. 下面证明 $m = 1$. 事实上, 因为 $x_{m+1} = x_1$ 及

$$F(x_{k+1}) - F(x_k^+) = T + \tau(x_{k+1}) - \tau(x_k)(k \geqslant 1), \tag{2.2.13}$$

或

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = G(x_k) + \tau(x_{k+1}) - \tau(x_k)(k \geqslant 1), \tag{2.2.14}$$

对 (2.2.14) 从 $k = 1$ 加到 $k = m$, 得

$$\tau(x_1) - \tau(x_{m+1}) + F(x_{m+1}) - F(x_1) = \sum_{k=1}^{m} G(x_k), \tag{2.2.15}$$

那么 $\sum\limits_{k=1}^{m} G(x_k) = 0$. 若存在 $k : 1 \leqslant k \leqslant m$, 使得 $G(x_k) \neq 0$, 则一定存在 $1 \leqslant i \leqslant m$ 使得 $G(x_i) \cdot G(x_{i+1}) < 0$. 所以必定存在 $K : x_i < K < x_{i+1}$ 或 $x_{i+1} < K < x_i$ 使得 $G(K) = 0$. 不失一般性, 假定

$$K \in (x_i, x_{i+1}),\ G(x)(x - K) > 0, \qquad x \in (x_i, x_{i+1}), x \neq K.$$

注意到 (2.2.13) 及 $G(K) = T + F(K + I(K)) - F(K) = 0$, 我们有

$$\begin{aligned} F(x_{i+1}) - F(K) &= F(x_i) + G(x_i) + \tau(x_{i+1}) - \tau(x_i) - F(K) \\ &= F(x_i^+) - F(K^+) + \tau(x_{i+1}) - \tau(x_i)(K^+ = K + I(K)). \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

又因为 $x_i < K$, 再由 (H_4) 得 $x_i^+ + I(x_1) < K + I(K) \triangleq K^+$. 由引理 2.2.2 和 (H_5), 有

$$F(x_i^+) - F(K^+) > \tau(x_i^+) - \tau(K^+) > \tau(x_i) - \tau(K). \tag{2.2.17}$$

由 (2.2.16), (2.2.17) 得

$$F(x_{i+1}) - F(K) > \tau(x_{i+1}) - \tau(K) \Rightarrow x_{i+1} > K,$$

由引理 2.2.2 可知，这是一个矛盾. 所以 $G(x_k)=0, 1\leqslant k\leqslant m$, 或 $G(x_1)=0$. 再由 (2.2.14) 得 $x_k=x_1$, $k>1$. 由 ODE 的唯一性理论知 $x(t,x_0)$ 是系统 (I) 的周期为 $T_0=T$ 的轨道. □

在上述结果的基础上，给出如下系统 (I) 周期轨道存在的充要条件.

定理 2.2.1 系统 (I) 有一个周期轨道当且仅当 $\Omega\neq\varnothing$.

证明 ($\Leftarrow$) 设 $\Omega\neq\varnothing$ 且 $\bar{K}\in\Omega$, 记 $\bar{x}_0$ 为 $H(\bar{K},x)$ 的零点. 则以 $\bar{x}_0$ 为初值的系统 (I) 的解 $\bar{x}(t,\bar{x}_0)$ 是一个周期轨道.

事实上，据 $\bar{t}_k,\bar{x}_k$ 的定义，有 $F(\bar{x}_1)-F(\bar{x}_0)=\bar{t_1}=T+\tau(\bar{x}_1)$, 再由 $H(\bar{K},\bar{x}_0)$ 去减，可得 $F(\bar{x}_1)-F(\bar{K})=\tau(\bar{x}_1)-\tau(\bar{K})\Rightarrow\bar{x_1}=\bar{K}$(由引理 2.2.2). 余下的证明同引理 2.2.4.

($\Rightarrow$) 设 $\bar{x}(t,\bar{x}_0)$ 是系统 (I) 的周期轨道，由引理 2.2.4, 可得 $\bar{x}_1=\bar{x}_2$. 因此 $F(\bar{x}_2)-F(\bar{x}_1^+)=T+\tau(\bar{x}_2)-\tau(\bar{x}_1)=T$, 这表明 $\bar{K}=\bar{x}_1$ 是 $G(x)$ 的零点. 因为 $F(\bar{x}_1)-F(\bar{x}_0)=T+\tau(\bar{x}_1)$, 或 $F(\bar{K})-F(\bar{x}_0)=T+\tau(\bar{K})$, 这说明 $\bar{K}\in H_0$. 所以 $\bar{K}\in G_0\bigcap H_0=\Omega$. □

下面我们给出系统 (I) 的极限环存在性的主要结果:

定理 2.2.2 假设 $(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_5)$ 成立，则有:

(i) 系统 (I) 有右稳定 (左稳定) 极限环当且仅当 $\Omega_+\neq\varnothing(\Omega_-\neq\varnothing)$;

(ii) 系统 (I) 有稳定的极限环当且仅当 $\Omega_l\neq\varnothing$;

(iii) 系统 (I) 有不稳定的极限环当且仅当 $\Omega\setminus(\Omega_+\bigcup\Omega_-)\neq\varnothing$.

证明 我们只给出 (i) 的证明，用相同的方法可以证明 (ii) 和 (iii). 证明分为两部分:

第一部分: 系统 (I) 有左稳定极限环当且仅当 $\Omega_-\neq\varnothing$.

($\Leftarrow$) 假定 $\Omega_-\neq\varnothing$, 那么存在 $K_1<\bar{K}$ 使得 $G(x)<0, x\in(K_1,\bar{K})$, 并有 $G(\bar{K})=0$. 因为 $\bar{K}\in\Omega_-\subset\Omega\subset H_0$, 所以由引理 2.2.3(i) 知 $K_1\in H_0$. 记 $M_1,\bar{x}_0$ 分别是 $H(K_1,x),H(\bar{K},x)$ 的零点. 由引理 2.2.2 容易证明 $M_1<\bar{x}_0$. 对任意的 $x_0\in(M_1,\bar{x}_0]$, 有

(1) $x_k=x(t_k,x_0)\in(K_1,\bar{K}]$, 且 $\{x_k\}$ 单调不减;

(2) $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\bar{K}$.

对于 (1), 因为 $F(x_1)-F(x_0)=T+\tau(x_1), F(x_0)\geqslant F(\bar{x}_0)$, 注意到 $H(\bar{K},\bar{x}_0)=0$, 我们有 $F(x_1)-F(\bar{K})\geqslant\tau(x_1)-\tau(\bar{K})$, 由引理 2.2.2, 这意味着 $x_1\leqslant\bar{K}$.

因为

$$\begin{aligned}F(x_1)-F(K_1)&=F(x_0)+T+\tau(x_1)-[F(M_1)+T+\tau(K_1)](\text{因为 } H(K_1,M_1)=0)\\&=F(x_0)-F(M_1)+\tau(x_1)-\tau(K_1)\\&<\tau(x_1)-\tau(K_1)(F(x)\text{在}R^+\text{上单调递减且}x_0>M_1).\end{aligned}$$

由引理 2.2.2, 这意味着 $x_1 > K_1$. 由 K_1 的定义及 $x_1 \in (K_1, \bar{K}]$ 知, $F(x_2) - F(x_1^+) = t_2 - t_1 = T + \tau(x_2) - \tau(x_1), G(\bar{x}_1) = T + F(x_1^+) - F(x_1) \leqslant 0$. 由引理 2.2.2 有 $F(x_2) - F(x_1) = G(x_1) + \tau(x_2) - \tau(x_1) \leqslant \tau(x_2) - \tau(x_1) \Rightarrow x_1 \leqslant x_2$. 因为 $G(\bar{K}) = T + F(\bar{K} + I(\bar{K})) - F(\bar{K}) = 0$, 同引理 2.2.4 的证明类似有 $x_2 \leqslant \bar{K}$.

从上述讨论我们知道 $K_1 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \bar{K}$, 并且容易证明 $x_k \in (K_1, \bar{K}]$ 且 $\{x_k\}(k \geqslant 1)$ 是单调不减的.

对于 (2), 由 (1) 的证明知存在 $K' \in (K_1, \bar{K}]$ 使得 $x_k \to K', k \to \infty$. 令 (2.2.15) 中的 $m \to \infty$, 注意到 (2.2.15) 的左端是收敛的, 由 $G(x)$ 的连续性, $G(x) \neq 0, x \in (K_1, \bar{K})$, 再注意 $\sum\limits_{k=1}^{m} G(x_k)$ 的收敛性条件, 易得 $K' = \bar{K}$.

下面证明 $\bar{x}(t, \bar{x}_0)$ 是系统 (I) 在区间 $(M_1, \bar{x}_0]$ 上的稳定极限环. 实际上, 对任意的 $x_0 \in (M_1, \bar{x}_0]$:

(1) 若 $t_0 = T + \tau(\bar{K})$, 可选取序列 $\{t_k\}$, 使得 $\lim_{k\to\infty} x(t_k \pm 0) = \bar{x}(t_0 \pm 0)$.

(2) 若 $t_0 \in (T + \tau(\bar{K}), 2T + \tau(\bar{K}))$, 可以选取 $t^{(k)} = (k-1)T + t_0$, 因为 $\tau(x_k) \to \tau(\bar{K}), k \to \infty$, 那么存在 $N > 0$ 使得 $t^{(k)} \in (kT + \tau(x_k), (k+1)T + \tau(x_k)), k \geqslant N$. 这样 $F[x(t^{(k)})] - F(x_k^+) = t^{(k)} - t_k = t_0 - T - \tau(x_k)$.

令 $k \to \infty$, 我们有

$$\lim_{k\to\infty} F[x(t^{(k)})] - F[\bar{K} + I(\bar{K})] = t_0 - T - \tau(\bar{K}). \tag{2.2.18}$$

因为

$$F(\bar{x}(t_0) - F(\bar{K} + I(\bar{K})) = t_0 - T - \tau(\bar{K}), \tag{2.2.19}$$

那么根据 $F(x)$ 的性质, 由 (2.2.18), (2.2.19) 得 $\lim_{k\to\infty} x(t^{(k)}) = \bar{x}(t_0)$.

($\Rightarrow$) 假定 $\bar{x}(t, \bar{x}_0)$ 是系统 (I) 的以 $\bar{x}_0$ 为初值的左稳定极限环. 由定理 2.2.1, 我们知存在 $\bar{K} \in G_0$ 使 $H(\bar{K}, \bar{x}_0) = 0$. 下证必有 $\bar{K} \in \Omega_-$. 事实上, 若不然, 则可出现下列两种情形:

情形 1. 存在 $\{K_n\}$, 使得

$$K_n < \bar{K}, G(K_n) = 0, n \geqslant 1; \qquad K_n \to \bar{K}, n \to \infty. \tag{2.2.20}$$

由引理 2.2.3 及定理 2.2.1 我们知系统 (I) 以 $x_{n_0}(H(K_n, x_{n_0}))$ 为初值的解 $x_n(t, x_{n_0})$ 是周期轨道. 而显然 $\bar{x}(t, \bar{x}_0)$ 不是 $x_n(t, x_{n_0})$ 的极限轨道, 矛盾.

情形 2. 存在左邻域 $\cup_-^0(\bar{K})$ 使得在 $(K_1, \bar{K}) = \cup_-^0(\bar{K})$ 上 $G(x) > 0$. 令系统 (I) 的满足 $x_0 < \bar{x}_0$ 的解 $x(t, x_0)$. 因为 $F(\bar{K}) - F(\bar{x}_0) = T + \tau(\bar{K}), F(x_1) - F(x_0) = T + \tau(x_1)$, 那么 $F(x_1) - F(\bar{K}) = \tau(x_1) - \tau(\bar{K}) + F(x_0) - F(\bar{x}_0) > \tau(x_1) - \tau(\bar{K})$, 从而有 $x_1 < \bar{K}$. 下面我们证明 $x_k < \bar{K}, k \geqslant 1$. 实际上, 若存在 $k_1 > 0$ 使得 $x_{k_1} \geqslant \bar{K}$, 那么 $F(x_{k_1}) - F(\bar{K}) \leqslant \tau(x_{k_1}) - \tau(\bar{K})$(由引理 2.2.2) 且 $F(\bar{K} + I(\bar{K})) - F(x_{k_1-1}^+) =$

$G(\bar{K})+F(\bar{K})-F(x_{k_1})+\tau(x_{k_1})-\tau(x_{k_1-1})=F(\bar{K})-F(x_{k_1})+\tau(x_{k_1})-\tau(x_{k_1-1})\geqslant \tau(\bar{K})-\tau(x_{k_1-1})$. 注意到 ($H_5$), 容易得到 $x_{k_1-1}\geqslant \bar{K}$, 同前面讨论，我们有 $x_1\geqslant \bar{K}$, 矛盾.

下证 $\bar{x}(t,\bar{x}_0)$ 不是满足 $x_0<\bar{x}_0$ 的任意 $x(t,x_0)$ 的极限环. 若不然，一定有 $x_k\to\bar{K},k\to\infty$. 那么由前述结论必存在 $N>0$, 有 $x_k\in(K_1,\bar{K}),k\geqslant N$. 不失一般性，假设 $x_k\in(K_1,\bar{K}),k\geqslant 1$, 这意味着 $G(x_k)>0$. 注意到 (2.2.14), 容易得到 $x_{k+1}<x_k(k\geqslant 1)$, 这与 $x_k\in(K,\bar{K})$ 且 $x_k\to\bar{K},k\to\infty$ 矛盾. 第一部分得证.

第二部分：系统 (I) 有右稳定极限环 $\Leftrightarrow \Omega_+\neq\varnothing$.

($\Leftarrow$) 假定 $\bar{K}\in\Omega_+$, 那么由引理 2.2.3, 存在 $\bar{x}_0,K_2>0$, 使得 $H(\bar{K},\bar{x}_0)=0,G(\bar{k})=0,G(x)>0,x\in(\bar{K},K_2),K_2\in H_0$. 同第一部分证明，我们有 $\bar{x}(t,\bar{x}_0)$ 是右稳定极限环.

($\Rightarrow$) 假定 $\bar{x}(t,\bar{x}_0)$ 是系统 (I) 的右稳定极限环. 令 $\bar{K}$ 满足 $H(\bar{K},\bar{x}_0)=0$, 下证 $\bar{K}\in\Omega_+$. 否则，有如下两种情形成立：

情形 1. 存在序列 $\{K_n\}(n\geqslant 1)$ 使得

$$K_n>\bar{K},G(K_n)=0,n\geqslant 1;\qquad K_n\to\bar{K},n\to\infty. \tag{2.2.21}$$

由引理 2.2.3(ii) 知存在 $N_0>0$, 使得当 $n>N_0$ 时, $K_n\in\Omega$. 由定理 2.2.1, 系统 (I) 的以 x_{n_0} 为初值且满足 $H(K_n,x_{n_0})=0$ 的解 $x_n(t,x_{n_0})$ 是系统 (I) 的周期轨道. 同前面讨论可以得到矛盾.

情形 2. 存在 $\bar{K}$ 右邻域的 $\cup^0_+(\bar{K})$ 使得在 $\cup^0_+(\bar{K})$ 上有 $G(x)<0$. 同前面讨论可以得到矛盾. □

注 2.2.3 若改变 $f(x)$ 在 R^+ 上的符号，可以在类似于 (H_3) 和 (H_4) 的条件下得到与定理 1, 定理 2 相同的结果.

注 2.2.4 由定理 2.2.1 和定理 2.2.2 可得：

(i) 系统 (I) 的周期轨道数目恰好等于集合 Ω 的数目.

(ii) 系统 (I) 的右稳定 (左稳定) 极限环数目恰好等于集合 $\Omega_+(\Omega_-)$ 的数目.

(iii) 系统 (I) 的稳定极限环数目恰好等于集合 Ω_l 的数目.

(iv) 系统 (I) 的不稳定极限环数目恰好等于集合 $\Omega\setminus(\Omega_+\bigcup\Omega_-)$ 的数目.

注 2.2.5 当 $\tau(x)\equiv\text{const.}$ 限制条件 (H_5) 自动满足，这恰好是系统 (I) 具有固定脉冲时刻的情形.

然而，条件 (H_5) 在某种意义上说稍强点，我们可以给出没有条件 (H_5) 的系统 (I) 的极限环存在的结果.

记 $J_i(i\geqslant 1)$ 是 $\tau(x+I(x))-\tau(x)$ 的单调不增开区间，并记 $J=\cup_{i=1}J_i$.

定理 2.2.3 假设 (H_1) $\sim$ (H_4) 成立，那么

(i) $\Omega_-\cap J\neq\varnothing(\Omega_+\cap J\neq\varnothing)$ 推出系统 (I) 有一个左稳定 (右稳定) 极限环.

(ii) $\Omega \cap J \neq \varnothing$ 推出系统 (I) 有一个稳定极限环.

(本定理的证明与定理 2.2.2 类似，详细证明略.)

例 2.2.1　在系统 (I) 中，令 $f(x) = -x^2, x + I(x) = \lambda x, \tau(x) = \alpha \arctan 1/x$, 并且 $\lambda > 1, \alpha > 0, T > 0$ 满足 $(\lambda - 1)/(\sqrt{\lambda}T) < 1$ 和 $\alpha \arctan(\lambda T)/(\lambda - 1) < T/(\lambda - 1)$, 令 $\bar{K} = (\lambda - 1)/\lambda T$. 容易证明如下事实成立：

(i) 系统 (I) 的每一个解在 $(0, \infty)$ 上存在，并且与脉冲面 $\tau_k(x) = kT + \tau(x)$ 恰好相撞一次.

(ii) $(\mathrm{H}_1) \sim (\mathrm{H}_4)$ 成立.

(iii) 对于任意的 $x \neq \bar{K}, x \in R^+$ 有 $G(\bar{K}) = 0, G(x)(x - \bar{K}) > 0$.

(iv) $H(\bar{K}, x) = F(\bar{K}) - F(x) - T - \tau(\bar{K})$ 在 R^+ 上有一个零点.

(v) $\tau(x + I(x)) - \tau(x)$ 在 $(0, 1/\sqrt{\lambda})$ 上是单调递减的，并且 $\bar{K} < 1/\sqrt{\lambda}$.

所以由定理 2.2.1 和定理 2.2.3 知系统 (I) 有一个周期轨道是稳定极限环. 显然系统 (I) 的周期轨道或极限环是唯一的.

§2.3　一维脉冲微分自治系统的奇点

本节考虑带有实参数的具有固定时刻脉冲的一维自治系统的奇点. 我们对这类系统的奇点进行了分类，并得到了其仅有的四种类型.

考虑如下实参数的具有固定时刻脉冲的微分系统：

$$\begin{cases} x' = f(x, \lambda), & t \neq t_k, x \in R; \\ \Delta x_k = I_k(x_k, \mu), & t = t_k, k = 1, 2, \cdots, \end{cases} \qquad (I_P)$$

这里 $f(\cdot, \lambda), I_k(\cdot, \mu)$ 是定义域上的连续函数，并使 (I_P) 的柯西问题的解整体存在唯一. $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots (1 \leqslant k)$ 和 $\lim\limits_{k \to \infty} t_k = \infty$. $\Delta x_k = (t_k + 0) - x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k)(1 \leqslant k)$. 记 $P = (\lambda, \mu) \in R^2, P_0 = (\lambda_0, \mu_0) \in R^2$; $U(P_0)$ 表示 P_0 在 R^2 上的某一邻域；$x_{P_0}(t, x_0)$ 是 (I_{P_0}) 满足 $x_{P_0}(0) = x_0$ 的解. 我们定义 (I_{P_0}) 的奇点.

定义 2.3.1　若 $x \equiv k \in R$ 是 (I_{P_0}) 的解，则称 k 是 (I_{P_0}) 的一个奇点.

注 2.3.1　(i) (I_{P_0}) 有奇点 $k \in R$ 的充要条件是

$$f(k, \lambda) = 0, I_k(k, \mu) = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots. \tag{2.3.1}$$

(ii) 令 $\bar{f}(x, \lambda) = f(x + k, \lambda)$, $\bar{I}_k(x, \mu) = I_k(x + k, \mu)$, 则 (I_{P_0}) 的奇点 k 可以化为另一脉冲微分系统的奇点 0.

本文只讨论 (I_P) 在奇点处解的性态，由于注 2.3.1, 我们提出如下基本要求：

(H_1) $f \in C[R^+, R], I_R \in C[R^+, R], R^+ = [0, \infty]$ 且

$$f(0, \lambda) \equiv 0, \qquad I_k(0, \mu) \equiv 0, \qquad P \in U(P_0), \tag{2.3.2}$$

进而我们对 (I_{P_0}) 的奇点进行如下分类：

定义 2.3.2

(i) 若存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $\forall\ x_0 \in (0, \delta_0)$, $\lim\limits_{t\to\infty} x_{P_0}(t, x_0) = 0$, 则称 $x = 0$ 是 (I_{P_0}) 的第一类奇点.

(ii) 若存在 $\delta_0 > 0$ 及 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $\forall\ x_0 \in (0, \delta_0)$ 有 $\lim\limits_{t\to\infty} x_{P_0}(t, x_0) \geqslant \varepsilon_0$, 则称 $x = 0$ 是 (I_{P_0}) 的第二类奇点.

(iii) 若存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $\forall\ x_0 \in (0, \delta_0), x_{P_0}(t, x_0)$ 都是 (I_{P_0}) 的周期解，则称 $x = 0$ 是 (I_{P_0}) 的第三类奇点.

(iv) 若对 $\forall \delta > 0$, 从 $(0, \delta)$ 出发的解，即有非周期解又有周期解，则称 $x = 0$ 是 (I_{P_0}) 的第四类奇点 (周期解的定义参见文献 [1]).

注 2.3.2

(i) 我们将在下面证明 (I_{P_0}) 的奇点仅有上述四种类型.

(ii) 第一类奇点的性质类似于常微中的吸引性奇点，而第三类奇点类似于常微中的中心式奇点.

下面我们考虑奇点类型的判别：

先给出下面特殊情形

$$\begin{cases} x' = f(x, \lambda), & t \neq kT, \\ \Delta x_k = I(x_k, \mu), & t = kT, k \geqslant 1 \end{cases} \tag{II_P}$$

的奇点类型的判别.

$\forall x \in R^+ \setminus \{0\}$, 记

$$F(x, \lambda) = \int_c^x \frac{1}{f(s, \lambda)} \quad (c > 0\text{是固定常数}), \tag{2.3.3}$$

$$G(x, P) = T + F[x + I(x, \mu), \lambda] - f(x, \lambda), \tag{2.3.4}$$

$$G_k(x, P) = T + F[x + I_k(x, \mu), \lambda] - f(x, \lambda). \tag{2.3.5}$$

引理 2.3.1 (II_{P_0}) 在 R^+ 上存在周期解 $\Leftrightarrow G(x, P_0)$ 有零根.

引理 2.3.2 $x = 0$ 是 (II_{P_0}) 的第一类 (第二类) 奇点 $\Leftrightarrow G(x, P_0) > 0(G(x, P_0) < 0)$, 当 $x \in (0, \delta)(\delta > 0)$.

本章第一节已证明了上面的结果. 由上面的结果很容易得到如下引理.

引理 2.3.3 (II_{P_0}) 的奇点 $x = 0$ 必是定义 2.3.2 中四种类型之一.

下面讨论较一般形式 (I_P) 的奇点类型的判别，为此提出如下的条件与记号：

(H_2) 存在 $\delta > 0$ 及 $U(P_0)$, 使得 $\forall P \in U(P_0)$ 时 $f(x, \lambda) < 0; x + I_k(x, \mu) > 0, \forall x \in (0, \delta), \forall k \geqslant 1$.

(H_3) $x + I_k(x, \mu)$ 对固定 μ 的关于 x 单调不减 $(k \geqslant 1)$.

(H_4) 对固定的 μ, $\lim_{k\to\infty} I_k(x,\mu) = I(x,\mu)$ 关于 $x\in(0,\delta)$ 一致成立;

$$\lim_{k\to\infty} T_k = T > 0, \qquad T_k = t_{k+1} - t_k, \qquad k \geqslant 1.$$

定义 2.3.3 若 (I_P) 中的 t_k 及 I_k 满足 (H_4), 则称 (II_P) 是 (I_P) 的极限脉冲微分自治系统.

以下讨论中, 总假设 $(H_1)\sim(H_4)$ 成立.

引理 2.3.4 对固定的 $P\in R^2$, $G_k(x,P)$ 在 $[\varepsilon_0,\delta)$ 上一致收敛于 $G(x,P)(\forall\varepsilon_0\in(0,\delta)$.

一般形式的脉冲微分自治系统与其相应的极限脉冲微分自治系统, 奇点的类型及在奇点附近解的性态有一定的联系. 下面我们给出 (I_P) 的奇点类型的判别.

定理 2.3.1 若 $x=0$ 是 (II_{P_0}) 的第一类奇点, 则 $x=0$ 必是 (I_{P_0}) 的第一类奇点.

证明 利用引理 2.3.2 及 2.3.4, 选取固定的 $\varepsilon_0,\delta_0>0$ 及自然数 N, 使得

$$G_k(x,P_0) > 0, \qquad x\in[\varepsilon_0,\delta_0], k\geqslant N. \tag{2.3.6}$$

记 $x(t;t_N,x_N^+)$ 为 (I_{P_0}) 的满足 $x(t_N)=x_N^+$ 的右行解,

$$x_k = x(t_k;t_N,x_N^+),\ x_k^+ = x(t_k+0;t_N,x_N^+), \qquad k>N.$$

(1) 下证: 对 $\forall x_N\in(0,\varepsilon_0)$,

$$\lim_{t\to\infty} x(t;t_N,x_N^+) = 0. \tag{2.3.7}$$

由于 $x(t;t_N,x_N^+ < x_k^+ = x_k + I_k(x_k,\mu))(t_k<t\leqslant t_{k+1},\ k\geqslant N)$, 从而只需证 $\lim_{t\to\infty} x_k = 0$. 令

$$\varepsilon_k = \inf\{\alpha>0|G_k(x,P_0)\geqslant 0,\ x\in[\alpha,\delta_0]\}, \qquad k\geqslant N. \tag{2.3.8}$$

虽然有 $\varepsilon_k<\varepsilon_0(k\geqslant N)$. 利用引理 2.3.2, 引理 2.3.4 及反证法易证

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0. \tag{2.3.9}$$

令

$$\begin{aligned} A &= \{x_k|G_k(x_k)\geqslant 0, R\geqslant N\},\\ B &= \{x_k|G_k(x_k)\geqslant 0, k\geqslant N\}, \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

则 $\{x_k|k\geqslant N\} = A\bigcup B, x_k\in B \Rightarrow x_k\in(0,\varepsilon_k)$.

$$\text{当 } x_k\in A \text{ 时 } \Rightarrow x_{k+1}\leqslant x_k;$$

$$\text{当 } x_k \in B \text{ 时 } \Rightarrow x_{k+1} > x_k. \tag{2.3.11}$$

利用 (2.3.11) 式及等式

$$F(x_{k+1}) - f(x_k) = G_k(x_k),$$

$$F(x_{k+1}) - F(x_N) = \sum_{k=N}^{k} G_n(x_n) = \int_{x_N}^{x_{k+1}} \frac{1}{f(s,\lambda)} ds,$$

其中 $F(x) = F(x,\lambda), G_k(x) = G_k(x,P), G(x) = G(x,P)$

易证当 A, B 有一个是有限集时 (2.3.7) 式均成立.

不妨设 A, B 均为无限集，由 (2.3.11) 式知 $\{x_k\}_{k\geqslant N}$ 是分段单调的. 从而必存在 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}(k_1 \geqslant N)$ 使得 .

$$x_{k_n} \in A, x_{k_n-1} \in B, \qquad \overline{\lim_{k\to\infty}} x_k = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_{k_n}. \tag{2.3.12}$$

由于 $x_{k_n} < x_{k_n-1}^+ = x_{k_n-1} + I_{k_n-1}(x_{k_n-1},\mu)$, $x_{k_n-1} < \varepsilon_{k_n-1}$, 利用 (2.3.9) 及 (H_1) 知

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} x_k \leqslant \lim_{n\to\infty} [\varepsilon_{k_n-1} + I_{k_n-1}(\varepsilon_{k_n+1},\mu)] = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = 0,$$

即 (2.3.7) 式成立.

(2) 由于上述的 ε_0 及 N 是固定的，由 $(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_3)$ 容易证明存在 $\delta > 0, \forall x_0 \in (0,\delta) \subset (0,\bar{\delta}), x_N = x(t_N, x_0) \in (0,\varepsilon_0)$. 再结合 (1) 的结论知， $x = 0$ 必为 (I_{P_0}) 的第一类奇点. □

定理 2.3.2 若 $x = 0$ 是 (II_{P_0}) 的第二类奇点且

$$G(0+0, P_0) < 0 \ \ (\text{允许为} -\infty), \tag{2.3.13}$$

则 $x = 0$ 必是 (I_{P_0}) 的第二类奇点.

证明 利用引理 2.3.2 、引理 2.3.4 及条件 $(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_4)$, 可知存在固定的 N 使得

$$G_k(x, P_0) < 0, \qquad \forall x \in (0,\delta_0), k \geqslant N. \tag{2.3.14}$$

利用上式及定理 2.3.1 中的类似证明方法可知： $\forall x_N \in (0,\delta_0)$, 有 $\underline{\lim_{k\to\infty}} \geqslant \delta_0$. 由于 $x(t; t_N, x_N^+) \geqslant x_k (t_{k-1} < t \leqslant t_k)(k > N)$, 从而 $\underline{\lim_{t\to\infty}} x(t; t_N, x_N^+) \geqslant \delta_0$. 再利用定理 2.3.1 证明过程中的 (2), 必存在 $\delta > 0$ 使 $\forall x_0 \in (0,\delta)$ 时， $\underline{\lim_{t\to\infty}} x(t; x_0) \geqslant \delta_0$, 从而 $x = 0$ 为 (I_{P_0}) 的第二类奇点. □

注 2.3.3 若 $x = 0$ 是 (II_{P_0}) 的第二类奇点, 由引理 2.3.2 知必有 $G(0+0, P_0) \leqslant 0$. 但若 $G(0+0, P_0) \leqslant 0, x = 0$ 可以不是 (I_{P_0}) 的第二类奇点.

§2.4 脉冲微分自治系统的分枝

同常微自治系统类似，(I_{P_0}) 的奇点类型也会随参数的变化而变化，从而我们给出下列概念：

定义 2.4.1 若当 P 在 P_0 点附近产生微小变化时，(I_{P_0}) 与 (I_P) 的奇点类型不同，则称 P_0 是 (I_P) 的一个分枝.

下面借助于第一节提出的新方法 —— 具有脉冲限的积分函数法，分别对每种类型的奇点建立产生分枝的判别准则. 值得提出的是，这些准则大多是充分必要条件.

首先我们给出 (II_P) 分枝产生的判别准则.

定理 2.4.1 若 $x=0$ 是 (II_{P_0}) 的第一类 (第二类) 奇点, 则 P_0 是 (II_{P_0}) 分枝点的充要条件是：对任何 $U(P_0)$, 存在 $P\in U(P_0)$ 及 $\delta_P>0(\delta_P<\delta)$ 使得 $\forall x\in(0,\delta_P)$, 有

(i) $G(x,P_0)G(x,P)<0$; 或

(ii) $G(x,P)\equiv 0$; 或

(iii) $G(x,P)\not\equiv 0$, 但有无穷多零根.

证明 利用引理 2.3.1 、引理 2.3.2 及引理 2.3.3, 可以证明结论成立.

定理 2.4.2 若 $x=0$ 是 (II_{P_0}) 的第三类奇点，则 P_0 是 (II_P) 分枝点的充要条件是：任何 $U(P_0)$, 存在 $P\in U(P_0)$, 对 $\forall\delta>0$, 有 $G(x,P)\neq 0(\forall x\in(0,\delta))$.

定理 2.4.3 若 $x=0$ 是 (II_{P_0}) 的第四类奇点，则 P_0 是 (II_p) 分枝点的充要条件是：对任何 $U(P_0)$, 存在 $P\in U(P_0)$ 及 $\delta_P>0$ 使得 $G(x,P)\neq 0, x\in(0,\delta_P)$ 或 $G(x,P)\equiv 0, x\in(0,\delta_P)$.

下面我们给出 (I_P) 分枝点存在的充分条件.

定理 2.4.4 若定理 2.3.1 中的条件成立, 且 $\forall U(P_0),\exists P\in U(P_0)$ 及 $\delta_P>0$ 使得 $G(x,P)>0, x\in(0,\delta_P)$, 则 P_0 必是 (I_P) 的分枝点.

定理 2.4.5 若 $G(x,P_0)>0, x\in(0,\delta_0)$ 且 $\forall U(P_0),\exists P\in U(P_0)$ 及 $\delta_P>0$ 使得 $G(x,P)<-\alpha(<0), x\in(0,\delta_P)$, 则 P_0 必是 (I_P) 的分枝点.

上述两定理的证明均可利用定理 2.3.1 及定理 2.3.2 简单推出.

附　注

脉冲微分自治系统的几何理论正处于起步阶段，本章内容属其初始性研究结果. § 2.1 的全部内容取自 [4] 和 [5]; §2.2 的全部内容取自 [6]; § 2.3 的全部内容取自 [7], 而 § 2.4 的全部内容取自 [8].

参考文献

1 Lakshimikantham V, Liu Xinzhi. Stability criteria for impulsive differendtial equations in terms of two measures. J. Math. Anal. Appl., 1989, 137: 591～604

2 Xilin Fu, Xinzhi Liu. Uniform boundedness and stability criteria in terms of two measures for impulsive integro-differential equations. Appl. Math. Comp., 1999, 102: 237～256

3 Xinzhi Liu. Further extensions of the direct method and stability of impulsive sysstems. Nonliear World, 1994, 1: 341～354

4 Xilin Fu, Jiangang Qi, Yansheng Liu. The existence of periodic orbits for nonlinear impulsive differential systems. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 1999, 4(1): 50～53

5 傅希林，綦建刚，刘衍胜．脉冲自治系统周期解存在及吸引的充要条件．数学年刊，2002，23A(4): 505～512

6 Jiangang Qi, Xilin Fu. Existence of limit cycles of impulsive differential equations with impulses at variable times. Nonlinear Analysis, 2001, 44: 345～353

7 傅希林，綦建刚．脉冲微分自治系统的起点与分枝 (I). 中国学术期刊文摘 (科技快报), 1999, 5(9): 1151～1152

8 綦建刚，傅希林．脉冲微分自治系统的起点与分枝 (II). 中国学术期刊文摘 (科技快报), 1999, 6(7): 862～864

第3章　脉冲微分系统的稳定性理论

众所周知，在以往研究常微分方程稳定性时，常用到的方法是 Lyapunov 第二方法．而对于脉冲微分系统的稳定性同样可以借助 Lyapunov 第二方法的思想进行研究．由于脉冲的影响，导致系统解的不连续性．从而相应的 Lyapunov 函数也是不连续的，并出现了与不含脉冲情形的一些本质区别．譬如，并不一定需要一个沿轨线的导数常负或定负的 Lyapunov 函数，允许 Lyapunov 函数沿轨线的连续部分递增，而在脉冲时刻跳跃后变小，但必须有条件限制其不能增长太快．又如可以不对系统的连续部分或离散部分分别限制条件，而是对它们设置混合条件，仍然可以得到脉冲微分系统的稳定性结果．再如可以利用 Lyapunov 函数沿系统轨线的二阶导数来限制其增长速度，甚至不用其导数限制其增长速度．本章主要阐述脉冲微分系统稳定性理论．重点突出在脉冲作用下稳定性分析的特点及主要研究方法．3.1 节利用 Lyapunov 函数广义二阶导数方法研究脉冲微分系统关于两个测度的稳定性．3.2 节通过对系统离散于连续部分分别设置条件的典型方法，研究了脉冲微分系统关于两个测度的有界性．3.3 节建立了具依赖状态脉冲微分系统的一般性比较原理．3.4 节借助变分 Lyapunov 函数方法研究脉冲摄动微分系统关于两个测度的稳定性．3.5 节利用通常在研究泛函微分方程稳定性时所使用的 Razumikhin 技巧的思想，研究了脉冲积分微分系统关于两个测度的稳定性．3.6 节研究一类重要的变结构脉冲微分系统 —— 脉冲混合微分系统关于两个测度的稳定性．3.7 节主要利用部分变元 Lyapunov 函数方法研究了脉冲泛函微分系统的稳定性．

§3.1　脉冲微分系统关于两个测度的稳定性

在以往的研究中，人们通常利用 Lyapunov 函数的一阶导数来讨论脉冲微分系统的各种性质，而且总是独立地对系统的离散及连续部分设置条件．而这里，我们在 Lyapunov 函数的广义二阶导数满足一定条件的前提下，通过对系统的离散及连续部分设置混合条件，进行综合估计．我们简单地称这种方法为 Lyapunov 函数广义二阶导数方法．使用此方法时，我们不必再考虑一阶导数的符号问题．因此，当 Lyapunov 函数的一阶导数符号不确定，而广义二阶导数存在且符号确定时，使用此方法研究脉冲微分系统特别有效．本节利用 Lyapunov 函数广义二阶导数方法研究了具有不依赖于状态脉冲的微分系统的稳定性、有界性、实际稳定性及最终稳定性，其中在研究稳定性和最终稳定性时引入了函数在某一区间上或在其间断点处

有界增长的概念，它限制了 Lyapunov 函数的增长. 另外本节给出了 3 个例子来说明定理的应用.

考虑如下具有不依赖于状态脉冲的微分系统：

$$\begin{cases} \dot{x}= f(t,x), & t \neq t_k, \\ \Delta x = I(t,x), & t = t_k, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

其中脉冲时刻满足 $t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots, \lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty; f, I : R_+ \times R^n \to R^n$ 在 $(t_{k-1}, t_k] \times R^n$ 上连续，且 $f(t_k^+, x), I(t_k^+, x)$ 存在， $k = 1, 2, \cdots$. 设 $x(t) = x(t; \tau_0, x_0)$ 为满足 $x(\tau_0^+) = x_0$ 的系统 (3.1.1) 的任一解， $\lim\limits_{t\to t_k^-} x(t) = x(t_k), \lim\limits_{t\to t_k^+} x(t) = x(t_k^+), \Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k)$. 我们假设系统 (3.1.1) 的解 $x(t)$ 在 $[\tau_0, +\infty)$ 上存在且唯一. 关于系统 (3.1.1) 的基本概念及性质请参阅文献 [1].

为方便起见，引进下列函数类：

$\Gamma = \{h : R_+ \times R^n \to R_+$, 在 $(t_{k-1}, t_k] \times R^n$ 上连续, 对 $\forall x \in R^n$, $\lim\limits_{(t,y)\to(t_k^+,x)} h(t,y) = h(t_k^+, x)$ 存在， $k = 1, 2, \cdots$, 且 $\inf h(t,x) = 0\}$;

$P_0 = \{\psi : R_+ \to R_+$, 当 $s \geqslant 0$ 时， $\psi(s) \geqslant 0, \psi(0) = 0\}$;

$P = \{\psi \in P_0$, 且不减 $\}$;

$K_0 = \{\psi \in P_0$, 当 $s > 0$ 时， $\psi(s) > 0\}$;

$K = \{\psi \in K_0$, 且严格递增 $\}$;

$L = \{\psi \in C[R_+, R_+]$, 且严格递减 $\}$;

$KR = \{\psi \in K$, 且 $\lim\limits_{s\to\infty} \psi(s) = \infty\}$;

$PC = \{\sigma : R_+ \to R_+$ 在 $(t_{k-1}, t_k]$ 上连续，且 $\lim\limits_{t\to t_k^+} \sigma(t) = \sigma(t_k^+)$ 存在 $\}$;

$PCK = \{\sigma : R_+ \times R_+ \to R_+$, 对于 $\forall u \in R_+, \sigma(\cdot, u) \in PC$, 对于 $\forall t \in R_+, \sigma(t, \cdot) \in K\}$;

$PCC = \{\sigma : R_+ \times R_+ \to R_+$, 对于 $\forall u \in R_+, \sigma(\cdot, u) \in PC$, 对于 $\forall t \in R_+, \sigma(t, \cdot) \in C[R_+, R_+]\}$;

$V_0 = \{V : R_+ \times R^n \to R_+$, 在 $(t_{k-1}, t_k] \times R^n$ 上连续可微，在 t_k 处左连续，关于 x 满足局部 Lipschitz 条件，对任意 $x \in R^n, V(t_k^+, x)$ 存在， $k = 1, 2, \cdots\}$.

定义 3.1.1 $V \in V_0$, 则对 $\forall (t,x) \in (t_{k-1}, t_k] \times R^n, V(t,x)$ 关于系统 (3.1.1) 的右上 Dini 导数为

$$D^+V(t,x) = \lim_{\delta\to 0^+} \sup \frac{1}{\delta}[V(t+\delta, x+\delta f(t,x)) - V(t,x)];$$

$V(t,x)$ 关于系统 (3.1.1) 的左上 Dini 导数为

$$D^-V(t,x) = \lim_{\delta\to 0^-} \sup \frac{1}{\delta}[V(t+\delta, x+\delta f(t,x)) - V(t,x)];$$

$V(t,x)$ 关于系统 (3.1.1) 的左下 Dini 导数为

$$D_-V(t,x) = \lim_{\delta\to 0^-} \inf \frac{1}{\delta}[V(t+\delta, x+\delta f(t,x)) - V(t,x)].$$

注 3.1.1　若 $V \in C^1[R_+ \times R^n, R_+]$, 则 $D_-V(t,x) = D^+V(t,x) = D^-V(t,x) = \dot{V}(t,x)$, 其中 $\dot{V}(t,x) = V_t(t,x) + V_x(t,x)f(t,x)$.

另外，还给出如下记号:

$$S(h,\rho) = \{(t,x) \in R_+ \times R^n, h(t,x) < \rho\},$$

$$\dot{V}(t_k, x(t_k)) = \lim_{t\to t_k^-} \dot{V}(t, x(t)),$$

$$\Delta V(t_k, x(t_k)) = V(t_k^+, x(t_k) + I(t_k, x(t_k))) - V(t_k, x(t_k)),$$

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}.$$

定义 3.1.2　设 $V \in V_0, h, h_0 \in \Gamma, V$ 称为

(i) h 正定: 如果存在常数 $\rho > 0$ 及函数 $b \in K$, 满足当 $h(t,x) < \rho$ 时，有

$$b(h(t,x)) \leqslant V(t,x);$$

(ii) h_0 弱渐小: 如果存在常数 $\delta > 0$ 及函数 $a \in PCK$, 满足当 $h_0(t,x) < \delta$ 时，有

$$V(t,x) \leqslant a(t, h_0(t,x));$$

(iii) h_0 渐小: 如果在 (ii) 中 $a \in K$.

定义 3.1.3　设 $h_0, h \in \Gamma$, 则称

(i) h_0 比 h 一致地好: 若存在常数 $\rho > 0$ 及函数 $\phi \in K$ 使得当 $h_0(t,x) < \rho$ 时，有

$$h(t,x) \leqslant \phi(h_0(t,x));$$

(ii) h_0 比 h 好: 若在 (i) 中 $\phi \in PCK$.

下面给出函数在给定区间上有界增长的概念 (参考文献 [6]).

定义 3.1.4　函数 $m(t) \geqslant 0$ 被称为在区间 (a,b) 上有界增长，如果

(i) 在区间 (a,b) 上连续;

(ii) 存在 $d \in P$ 使得 $Dm(t) \leqslant d(m(t)), \forall t \in (a,b)$, 其中 D 为任一 Dini 导数;

(iii) 对任意常数 $\delta_1 > 0$, 存在常数 $\delta_2, 0 < \delta_2 < \delta_1$, 使得 $\displaystyle\int_{\delta_2}^{\delta_1} \frac{dm}{d(m)} \geqslant b-a$.

定义 3.1.5　函数 $m(t) \geqslant 0$ 被称为在区间 (a_k, b_k) 上一致有界增长, $k = 1, 2, \cdots, r \leqslant \infty$, 如果

(i) 对每个 $k, m(t)$ 在 (a_k, b_k) 上连续;

(ii) 对每个 $k, m(t)$ 在 (a_k, b_k) 上有界增长;

(iii) 对任意常数 $\delta_1 > 0$, 存在常数 $\delta_2, 0 < \delta_2 < \delta_1$, 使得对所有 k 一致地有

$$\int_{\delta_2}^{\delta_1} \frac{dm}{d_k(m)} \geqslant b_k - a_k,$$

其中函数 d_k 由 (ii) 中 $m(t)$ 在 (a_k, b_k) 上有界增长的定义所确定.

类似地，我们给出函数在其间断点处有界增长的概念.

定义 3.1.6 $t = b$ 为其跳跃间断点的左连续函数 $m(t) \geqslant 0$ 被称为在 $t = b$ 处有界增长，如果存在函数 $d \in P$ 使得

$$m(b^+) \leqslant d(m(b)). \tag{$*$}$$

注 3.1.2 由于 $d(0) = 0$ 及 d 连续，$(*)$ 说明对任意 $\delta_1 > 0$, 存在 $\delta_2, 0 < \delta_2 < \delta_1$ 使得当 $m(b) < \delta_2$ 时，有

$$m(b^+) \leqslant d(m(b)) < \delta_1.$$

定义 3.1.7 $t = b_k$ 为其跳跃间断点的左连续函数 $m(t) \geqslant 0$ 被称为在 $t = b_k, k = 1, 2, \cdots, r \leqslant \infty$ 一致有界增长，如果

(i) 对每个 $k, m(t)$ 在 b_k 处有界增长;

(ii) 对每个 $\delta_1 > 0$, 存在常数 $\delta_2, 0 < \delta_2 < \delta_1$, 使得对所有 k 一致地有当 $m(b_k) < \delta_2$ 时，有

$$d_k(m(b_k)) < \delta_1,$$

其中函数 d_k 由 (i) 中 $m(t)$ 在 b_k 处有界增长的定义所确定.

定义 3.1.8 设 $h_0, h \in \Gamma, x(t) = x(t; \tau_0, x_0)$ 是系统 (3.1.1) 的任一解，系统 (3.1.1) 被称为

(i) (h_0, h) 稳定：如果对 $\forall \varepsilon > 0, \forall \tau_0 \in R_+$, 存在常数 $\delta = \delta(\tau_0, \varepsilon) > 0$, 满足当 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \delta$ 时，有

$$h(t, x(t)) < \varepsilon, \qquad t \geqslant \tau_0;$$

(ii) (h_0, h) 吸引：如果对 $\forall \varepsilon > 0, \forall \tau_0 \in R_+$, 存在正常数 $\delta_0 = \delta_0(\tau_0), T = T(\tau_0, \varepsilon) > 0$, 满足当 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \delta$ 时，有

$$h(t, x(t)) < \varepsilon, \qquad t \geqslant \tau_0 + T;$$

(iii) (h_0, h) 一致稳定：如果 (i) 中 δ 与 τ_0 无关;

(iv) (h_0, h) 一致吸引：若 (ii) 中 δ, T 与 τ_0 无关;

(v) (h_0, h) 渐近稳定：如果 (i), (ii) 同时成立;

(vi) (h_0, h) 一致渐近稳定：如果 (iii), (iv) 同时成立;

(vii) (h_0, h) 不稳定：若 (i) 不成立.

下面将给出几个关于系统 (3.1.1) 的 (h_0, h) 稳定性的结论.

定理 3.1.1　假定

(i) $h_0, h \in \Gamma$, 且 h_0 比 h 好;

(ii) 存在 $0 < \rho_0 < \rho$, 使得当 $(t_k, x) \in S(h, \rho_0)$ 时, 有 $(t_k^+, x + I(t_k, x)) \in S(h, \rho)$;

(iii) $V \in V_0, V(t, x)$ 为 h 正定, h_0 弱渐小;

(iv) 对所有 $k = 1, 2, \cdots$, 有 $\Delta t_k \dot{V}(t_k, x) + \Delta V(t_k, x) \leqslant 0, \quad (t_k, x) \in S(h, \rho)$;

(v) $D^- \dot{V}(t, x(t)) \geqslant 0, \quad (t, x) \in S(h, \rho)$;

(vi) $V(t, x(t))$ 在 (t_{k-1}, t_k) 上一致有界增长;

(vii) $V(t, x(t))$ 在 t_k 处有界增长,

则系统 (3.1.1) 为 (h_0, h) 稳定.

证明　由于 $V(t, x)$ 为 h 正定, h_0 弱渐小, 则存在函数 $a \in PCK, b \in K$, 常数 $\delta_0 > 0, \alpha_0 \in (0, \rho]$, 使得

$$\text{当}\, h(t,x) < \alpha_0\, \text{时}, \qquad \text{有}\ V(t,x) \geqslant b(h(t,x)); \tag{3.1.1}$$

$$\text{当}\, h_0(t,x) < \delta_0\, \text{时}, \qquad \text{有}\ V(t,x) \leqslant a(t, h_0(t,x)). \tag{3.1.2}$$

由 (i), 存在函数 $\varphi \in PCK$, 常数 $\delta_1 > 0$, 使得当 $h_0(t, x) < \delta_1$ 时, 有

$$h(t,x) \leqslant \varphi(t, h_0(t,x)). \tag{3.1.3}$$

$\forall \varepsilon \in (0, \rho^*), \rho^* = \min(\rho_0, \alpha_0)$, 由 V 在 (t_{k-1}, t_k) 上一致有界增长, 则存在函数 $d_k \in P$, 使得

$$\dot{V}(t,x) \leqslant d_k(V(t,x)), \qquad (t,x) \in S(h,\rho), t \in (t_{k-1}, t_k), \tag{3.1.4}$$

且存在常数 $v_1 = v_1(\varepsilon) \leqslant b(\varepsilon)$ 使得

$$\int_{v_1}^{b(\varepsilon)} \frac{ds}{d_k(s)} \geqslant \Delta t_k, \qquad k = 1, 2, \cdots. \tag{3.1.5}$$

令 $q = \min\{k : t_k \geqslant \tau_0\}$, 其中 τ_0 为初始时刻. 由于 V 在 $t_k, k = 1, 2, \cdots$ 处有界增长, 则存在常数 $v_2 = v_2(\tau_0, \varepsilon) < v_1$, 使得当 $V(t_q, x(t_q)) < v_2$ 时有

$$V(t_q^+, x(t_q^+)) < v_1. \tag{3.1.6}$$

再一次利用 V 在 (t_{k-1}, t_k) 上有界增长, 则存在常数 $v_0 = v_0(\tau_0, \varepsilon) < v_2$ 使得

$$\int_{v_0}^{v_2} \frac{ds}{d_q(s)} \geqslant \Delta t_q. \tag{3.1.7}$$

选取常数 $\delta_2 = \delta_2(\tau_0, \varepsilon) > 0, \delta_3 = \delta_3(\tau_0, \varepsilon) > 0$ 使得

$$a(\tau_0^+, \delta_2) < v_0, \qquad \varphi(\tau_0^+, \delta_3) < \varepsilon. \tag{3.1.8}$$

令 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. 设 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \delta$, 则由 (3.1.2) 及 (3.1.8) 得

$$V(\tau_0^+, x_0) \leqslant a(\tau_0^+, h_0(\tau_0^+, x_0)) < a(\tau_0^+, \delta) < v_0. \tag{3.1.9}$$

设 $x(t) = x(t; \tau_0, x_0)$ 为系统 (1) 的满足 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \delta$ 的任一解，则由 (3.1.3), (3.1.8) 得

$$h(\tau_0^+, x_0) \leqslant \varphi(\tau_0^+, h_0(\tau_0^+, x_0)) < \varphi(\tau_0^+, \delta) < \varepsilon. \tag{3.1.10}$$

下证： $h(t, x(t)) < \varepsilon, \quad t \geqslant \tau_0.$

否则，存在系统 (3.1.1) 满足 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \delta$ 的某解 $x(t)$ 及 $t^0 > \tau_0, t_j < t^0 \leqslant t_{j+1}$, 某 $j \in N$, 使得

$$h(t^{0+}, x(t^{0+})) \geqslant \varepsilon \text{ 且 } h(t, x(t)) < \varepsilon, \qquad t \in [\tau_0, t_j].$$

由于 $\varepsilon \in (0, \rho^*)$, 由 (ii) 得 $h(t_j^+, x(t_j^+)) = h(t_j^+, x(t_j) + I(t_j, x(t_j))) < \rho$. 由此，能找到 $\tilde{t}$, 使得

$$\varepsilon \leqslant h(\tilde{t}, x(\tilde{t})) < \rho \text{ 且 } h(t, x(t)) < \rho, \qquad t \in [\tau_0, \tilde{t}].$$

1^0 $\quad j \geqslant q$ 情形.

若 $j > q$, 对 $k = q+1, \cdots, j$, 有

$$\begin{aligned}
&V(t_k^+, x(t_k^+)) - V(t_{k-1}^+, x(t_{k-1}^+)) \\
&= V(t_k^+, x(t_k^+)) - V(t_k, x(t_k)) + V(t_k, x(t_k)) - V(t_{k-1}^+, x(t_{k-1}^+)) \\
&= \Delta V(t_k, x(t_k)) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{V}\ (t, x(t))dt.
\end{aligned}$$

由 (v), $\dot{V}\ (t, x(t))$ 在 $(t_{k-1}, t_k]$ 上不减，结合 (iv) 得

$$\begin{aligned}
&V(t_k^+, x(t_k^+)) - V(t_{k-1}^+, x(t_{k-1}^+)) \\
&\leqslant \Delta V(t_k, x(t_k)) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{V}\ (t_k, x(t_k))dt \\
&= \Delta V(t_k, x(t_k)) + \Delta t_k \dot{V}\ (t_k, x(t_k)) \\
&\leqslant 0.
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

故

$$V(t_k^+, x(t_k^+)) \leqslant V(t_{k-1}^+, x(t_{k-1}^+)).$$

因此得

$$V(t_j^+, x(t_j^+)) \leqslant V(t_q^+, x(t_q^+)), \qquad j \geqslant q. \tag{3.1.12}$$

下证：　$V(t_q^+, x(t_q^+)) < v_1$,　$j \geqslant q$.

由 (3.1.9), (3.1.4) 得

$$\int_{v_0}^{V(t_q,x(t_q))} \frac{ds}{d_q(s)} < \int_{V(\tau_0^+,x_0)}^{V(t_q,x(t_q))} \frac{ds}{d_q(s)} \leqslant t_q - \tau_0 \leqslant \Delta t_q.$$

由 (3.1.7) 得 $V(t_q, x(t_q)) < v_2$.　由 (3.1.6) 得 $V(t_q^+, x(t_q^+)) < v_1$.

故

$$V(t_j^+, x(t_j^+)) < v_1.$$

2^0　$j < q$ 情形. 此时有 $t_j < \tau_0$.

令 $t^* = \max(t_j, \tau_0)$, 其中 $j \geqslant q$ 或 $j < q$. 由于 $v_0 < v_1$, 故

$$V(t^{*+}, x(t^{*+})) < v_1. \tag{3.1.13}$$

易知 $\tilde{t} \in [t^*, t_{j+1})$. 若 $\tilde{t} > t^*$, 则 $\tilde{t}$ 为 $x(t)$ 的连续点, 从而 $x(\tilde{t}^+) = x(\tilde{t})$. 由 (3.1.4), (3.1.5), (3.1.13) 得

$$\begin{aligned}
\Delta t_{j+1} &\geqslant \tilde{t} - t^* \geqslant \int_{V(t^{*+},x(t^{*+}))}^{V(\tilde{t}^+,x(\tilde{t}^+))} \frac{ds}{d_{j+1}(s)} \\
&> \int_{v_1}^{b(h(\tilde{t}^+,x(\tilde{t}^+)))} \frac{ds}{d_{j+1}(s)} \geqslant \int_{v_1}^{b(\varepsilon)} \frac{ds}{d_{j+1}(s)} \\
&\geqslant \Delta t_{j+1}, \text{ 矛盾}.
\end{aligned}$$

若 $\tilde{t} = t^*$, 则 $b(\varepsilon) \leqslant b(h(\tilde{t}^+, x(\tilde{t}^+))) \leqslant V(\tilde{t}^+, x(\tilde{t}^+)) < v_1 \leqslant b(\varepsilon)$,　矛盾.　□

推论 3.1.1　若定理 3.1.1 中的 (iv) 加强为

(i′) $\Delta t_k \dot{V}(t,x) + \Delta V(t,x) \leqslant 0$, $(t,x) \in S(h,\rho)$,

则 (vi) 可去掉, 结论仍成立.

证明　由于 V 非负, 由 (i′) 得

$$\dot{V}(t,x) \leqslant \frac{V(t,x)}{\Delta t_k}, \qquad t \neq t_k,\ (t,x) \in S(h,\rho).$$

易知, 上式意味着 V 在 (t_{k-1}, t_k) 上一致有界增长.　□

定理 3.1.2　在定理 3.1.1 中, 若另设 V 为 h_0 渐小, 且 $V(t, x(t))$ 在 t_k 处一致有界增长, h_0 比 h 一致地好, 则系统 (3.1.1) 为 (h_0, h) 一致稳定.

证明　若 h_0 比 h 一致地好, V 为 h_0 渐小, $V(t, x(t))$ 在 t_k 处一致有界增长, 则在定理 3.1.1 中, 取 $\varphi \in K$, $a \in K$, δ_0, δ_1, v_2 与 τ_0 无关, 从而 v_0, δ_2, δ_3 也与 τ_0 无关, 取 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3\} = \delta(\varepsilon)$. 以下证明类似定理 3.1.1. 从而系统 (3.1.1) 为 (h_0, h) 一致稳定.　□

定理 3.1.3 若定理 3.1.2 中各条件成立，且进一步设

(i) Δt_k 一致有界， V 为 h 渐小；

(ii) 存在函数 $c \in K_0$, 常数 $\mu_k \geqslant 0$, 使得

$$\Delta t_k \dot{V}(t_k, x) + \Delta V(t_k, x) \leqslant -u_k c(h(t_k, x)), \qquad (t_k, x) \in S(h, \rho);$$

(iii) 对任意给定正数 C, 存在正整数 N, 使得

$$\sum_{k=q+1}^{q+N} u_k > C, \qquad \forall q \geqslant 0,$$

则系统 (3.1.1) 为 (h_0, h) 一致渐近稳定.

证明 由定理 3.1.2 知，只需证系统 (3.1.1) 为 (h_0, h) 一致吸引. 由 $V(t,x)$ 为 h 渐小，存在函数 $d \in K$, 常数 $\delta_1 > 0$, 使得当 $h(t,x) < \delta_1$ 时，有

$$V(t,x) < d(h(t,x)). \tag{3.1.14}$$

由系统 (3.1.1) 为 (h_0, h) 一致稳定，对 $\rho_1 \in (0, \min(\rho, \delta_1))$, 存在 $\delta_0 = \delta_0(\rho_1)$ 使得当 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \delta_0$ 时有

$$h(t, x(t; \tau_0, x_0)) < \rho_1, \qquad t \geqslant \tau_0. \tag{3.1.15}$$

由定理 3.1.2 及 (i) 知系统 (3.1.1) 为 (h,h) 一致稳定. $\forall \varepsilon \in (0, \rho_1), \delta = \delta(\varepsilon)$ 为 (h,h) 一致稳定定义中所确定. 设 $x(t) = x(t; \tau_0, x_0)$ 为系统 (1) 的满足 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \delta_0$ 的任一解. 利用 (ii) 及定理 3.1.1 中 (v), 类似定理 3.1.1 证明过程得

$$V(t_k^+, x(t_k^+)) \leqslant V(t_{k-1}^+, x(t_{k-1}^+)) - u_k c(h(t_k, x(t_k))). \tag{3.1.16}$$

由于 $c \in K_0$ 必在 $[\delta, \rho_1]$ 上取得最小值，设最小值点为 M. 令 $q = \min\{k : t_k \geqslant \tau_0\}$. 由 (iii), 存在 $N = N(\varepsilon)$, 使得

$$\sum_{k=q+1}^{q+N} u_k > \frac{d(\rho_1)}{c(M)}.$$

由 (3.1.14), (3.1.15) 知

$$V(t_q^+, x(t_q^+)) < d(h(t_q^+, x(t_q^+))) < d(\rho_1).$$

令 $T = (N+1)A$, 其中 $\Delta t_k < A, k = 1, 2, \cdots$. 注意到 $t_{q+N} \leqslant \tau_0 + T$.

下证：存在 $t^* \in [\tau_0, \tau_0 + T]$ 使得 $h(t^*, x(t^*)) < \delta$.

否则， $h(t, x(t)) \geqslant \delta, t \in [\tau_0, \tau_0 + T]$. 由 (3.1.16) 得

$$V(t_{q+N}^+, x(t_{q+N}^+)) \leqslant V(t_q^+, x(t_q^+)) - \sum_{k=q+1}^{q+N} u_k c(h(t_k, x(t_k)))$$

$$< d(\rho_1) - c(M) \sum_{k=q+1}^{q+N} u_k$$
$$< 0, \quad 矛盾.$$

由 (h,h) 一致稳定知，$h(t,x(t)) < \varepsilon, t \geqslant t^*$. 故 $h(t,x(t)) < \varepsilon, t \geqslant \tau_0 + T$. 所以系统 (3.1.1) 为 (h_0,h) 一致渐稳. □

当 $\dot{V}(t,x(t))$ 在 (t_{k-1},t_k) 上不增时，我们得到定理 3.1.1~3.1.3 的一个对偶结果. 由于其证明与前面定理类似，我们仅列出如下：

定理 3.1.4　设

(i) $h_0, h \in \Gamma$ 且 h_0 比 h 好;

(ii) 存在 $0 < \rho_0 < \rho$, 使得当 $(t_k, x) \in S(h,\rho_0)$ 时，有 $(t_k^+, x + I(t_k,x)) \in S(h,\rho), k = 1,2,\cdots$;

(iii) $V \in V_0, V(t,x)$ 为 h 正定，h_0 弱渐小;

(iv) 对所有 $k = 1,2,\cdots$, 有

$$\Delta t_{k+1} \dot{V}(t_k,x) + \Delta V(t_{k+1},x) \leqslant 0, \qquad (t_k,x) \in S(h,\rho);$$

(v) $D^- \dot{V}(t,x) \leqslant 0, (t,x) \in S(h,\rho)$;

(vi) $V(t,x(t))$ 在 (t_{k-1},t_k) 上一致有界增长;

(vii) $V(t,x(t))$ 在 t_k 处有界增长,

则系统 (3.1.1) 为 (h_0,h) 稳定.

若另设 (viii) V 为 h_0 渐小，$V(t,x(t))$ 在 t_k 处一致有界增长，h_0 比 h 一致地好，则系统 (3.1.1) 为 (h_0,h) 一致稳定.

若进一步设 Δt_k 一致有界，V 为 h 渐小，且 (iv) 加强为

(iv′) 存在函数 $c \in K_0$, 常数 $\mu_k \geqslant 0$, 使得对所有 $k = 1,2,\cdots$, 有

$$\Delta t_{k+1} \dot{V}(t_k,x) + \Delta V(t_{k+1},x) \leqslant -u_k c(h(t_k,x)), \qquad (t_k,x) \in S(h,\rho),$$

其中 μ_k 满足：对于任意给定正数 C, 存在正整数 N, 使得

$$\sum_{k=q+1}^{q+N} u_k > C, \qquad \forall q \geqslant 0, \tag{3.1.17}$$

则系统 (3.1.1) 为 (h_0,h) 一致渐稳.

注 3.1.3　若 (3.1.17) 被减弱为 $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = \infty$, 则系统 (3.1.1) 为 (h_0,h) 渐近稳定.

注 3.1.4　在定理 3.1.1 中，若 $h(t,x) = |x|_s, 1 \leqslant s \leqslant n, h_0 = |x|$, 则可得系统 (3.1.1) 零解的部分稳定性.

如果利用一族 Lyapunov 函数，那么其中的每一个 Lyapunov 函数满足相对弱的条件. 下面的定理体现了这一思想.

定理 3.1.5 假设

(i) $h_0, h \in \Gamma, h_0$ 比 h 一致地好;

(ii) 存在 $0 < \rho_0 < \rho$, 满足当 $(t_k, x) \in S(h, \rho_0)$ 时，有 $(t_k^+, x + I(t_k, x)) \in S(h, \rho), k = 1, 2, \cdots$;

(iii) $\forall \beta > 0, \exists \alpha > 0$, 满足 $h_0(t_k, x) < \alpha$ 时，$h_0(t_k^+, x+I(t_k, x)) < \beta, k = 1, 2, \cdots$;

(iv) $\forall \eta > 0$, 存在 $V_\eta \in V_0$ 满足

$$b(h(t,x)) \leqslant V_\eta(t,x) \leqslant a(h_0(t,x)), \qquad (t,x) \in S(h,\rho) \cap S^c(h_0,\eta);$$

(v) $\Delta t_k \dot{V}_\eta (t_k, x) + \Delta V_\eta(t_k, x) \leqslant 0, (t_k, x) \in S(h, \rho) \cap S^c(h_0, \eta), k = 1, 2, \cdots$;

(vi) $D^- \dot{V}_\eta (t, x) \geqslant 0, (t, x) \in S(h, \rho) \cap S^c(h_0, \eta)$;

(vii) $V_\eta(t, x(t))$ 在 (t_{k-1}, t_k) 上一致有界增长;

(viii) $V_\eta(t, x(t))$ 在 t_k 处一致有界增长,

则系统 (3.1.1) 为 (h_0, h) 一致稳定.

下面是一个关于 (h_0, h) 不稳定的结果.

定理 3.1.6 设

(i) $h, h_0 \in \Gamma$, 且存在 $(t^*, x^*) \in S(h, \rho)$, 使得 $h_0(t^*, x^*) = 0$;

(ii) $V \in V_0$ 在 $S(h, \rho)$ 上有界，且 $D^- \dot{V} (t, x) \leqslant 0,\ t \neq t_k,\ (t, x) \in S(h, \rho)$;

(iii) 存在函数 $c \in K$ 和常数 $\mu_k \geqslant 0$, 使得对 $k = 1, 2, \cdots$, 有

$$\Delta t_k \dot{V} (t_k, x) + \Delta V(t, x) \geqslant \mu_k c(V(t_k^+, x)), \qquad (t_k, x) \in S(h, \rho),$$

且对任意 $\delta > 0$, 有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k c(\delta) = \infty$,

则系统 (3.1.1) 是 (h_0, h) 不稳定的.

证明 设 $\delta > 0$ 充分小. 由 (i) 存在 $(\tau_0, x_0) \in S(h, \rho)$ 使得 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \delta$. 设 $x(t) = x(t; \tau_0, x_0)$ 是系统 (1) 的满足 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \delta$ 的某个解，且 $(t, x(t)) \in S(h, \rho), t \geqslant \tau_0$.

令 $m(t) = V(t, x(t)), q = \min\{k : t_k \geqslant \tau_0\}$. 由 (ii) 得 $\dot{V} (t, x(t))$ 在 (t_{k-1}, t_k) 上是不增的，故由 (iii) 得

$$m(t_k^+) - m(t_{k-1}^+) = \Delta m(t_k) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{m} (t)dt \geqslant \Delta m(t_k) + \Delta t_k \dot{m} (t_k) \geqslant u_k c(m(t_k^+)).$$

故 $m(t_k^+) \geqslant m(t_{k-1}^+) + \mu_k c(m(t_k^+)), k = q+1, \cdots$, 所以

$$m(t_k^+) \geqslant m(t_q^+) + \sum_{j=q+1}^{k} \mu_j c(m(t_q^+)) \to \infty (k \to \infty), \quad 矛盾.$$

因此必存在 $t_1 > \tau_0$, 使得 $h(t_1, x(t_1)) \geqslant \rho$. 所以系统 (3.1.1) 是 (h_0, h) 不稳定的. □

例 3.1.1　考虑脉冲微分系统:

$$\begin{cases} x_1' &= \dfrac{1}{10}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2, & t \neq k, \\ x_2' &= \dfrac{2}{5}x_1 - \dfrac{3}{4}x_2, & t \neq k, \\ \Delta x_1 &= -\dfrac{4}{5}x_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{5}x_2, & t = k, \\ \Delta x_2 &= -\dfrac{13}{20}x_1 + \dfrac{13\sqrt{3}-20}{20}x_2, & t = k, k = 1, 2, \cdots. \end{cases} \tag{3.1.18}$$

选取 $V(t,x) = x_1^2 + x_2^2$, 则

$$\dot{V}\ (t,x) = \frac{1}{5}x_1^2 + \frac{9}{5}x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 \leqslant 2(x_1^2 + x_2^2),$$

$$\ddot{V}\ (t,x) = \frac{19}{25}x_1^2 - \frac{217}{100}x_1x_2 + \frac{63}{20}x_2^2 \geqslant 0,$$

$$\begin{aligned} &\Delta t_k\ \dot{V}\ (t_k, x) + \Delta V(t_k, x) \\ &= -\frac{16}{25}x_1^2 + \frac{19}{25}x_1x_2 - \frac{81}{100}x_2^2 \\ &\leqslant -\frac{16}{25}x_1^2 + \frac{19}{50}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{81}{100}x_2^2 \\ &\leqslant -\frac{43}{100}(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned}$$

我们令 $h_0(t,x) = h(t,x) = |x|,\quad \mu_k = \dfrac{43}{100}, c(s) = s^2$. 这样定理 3.1.3 的所有条件均成立，故系统 (3.1.18) 的零解一致渐近稳定.

我们再来看脉冲微分系统关于两个测度的有界性. 先给出下列的 (h_0, h) 有界的定义.

定义 3.1.9　设 $h_0, h \in \Gamma, x(t) = x(t; \tau_0, x_0)$ 为系统 (3.1.1) 的任一解，称系统 (3.1.1) 为

(i) (h_0, h) 等度有界：如果对任意给定 $\alpha > 0, \tau_0 \in R_+$, 存在 $\beta = \beta(\tau_0, \alpha) > 0$, 满足当 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \alpha$ 时，有

$$h(t, x(t)) < \beta, \qquad t \geqslant \tau_0;$$

(ii) (h_0, h) 一致有界：如果 (i) 中 β 与 τ_0 无关;

(iii) (h_0, h) 拟一致最终有界：如果存在常数 $\beta > 0$, 对 $\forall \alpha > 0, \tau_0 \in R_+$, 存在 $T = T(\alpha) > 0$, 满足当 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \alpha$ 时，有

$$h(t, x(t)) < \beta, \qquad t \geqslant \tau_0 + T;$$

(iv) (h_0, h) 一致最终有界：如果 (ii), (iii) 同时成立.

定理 3.1.7 假定

(i) $h_0, h \in \Gamma$, $h(t,x) \leqslant \varphi(t, h_0(t,x))$, $\varphi \in PCC$;

(ii) 存在函数 $V \in V_0$, $a \in KR$, $b \in PCC$, 常数 $\rho > 0$, 使得

$$a(h(t,x)) \leqslant V(t,x), \qquad (t,x) \in S^c(h,\rho),$$

$$V(t,x) \leqslant b(t, h(t,x)), \qquad (t,x) \in R_+ \times R^n;$$

(iii) 对所有 $k = 1, 2, \cdots$, 有

$$\Delta t_k \dot{V}(t_k, x) + \Delta V(t_k, x) \leqslant 0; \tag{3.1.19}$$

(iv)
$$D^- \dot{V}(t,x) \geqslant 0, \qquad (t,x) \in (t_{k-1}, t_k) \times R^n; \tag{3.1.20}$$

(v) 存在函数 $P_k \in P$, 使得

$$\dot{V}(t,x) \leqslant P_k(V(t,x)), \qquad (t,x) \in (t_{k-1}, t_k) \times R^n; \tag{3.1.21}$$

(vi) 存在函数 $C_k \in P, k = 1, 2, \cdots$, 使得

$$V(t_k^+, x) \leqslant C_k(V(t_k, x)), \tag{3.1.22}$$

且

$$\int_{C_k(\sigma)}^{\sigma} \frac{ds}{P_k(s)} > \Delta t_k, \tag{3.1.23}$$

则系统 (3.1.1) 为 (h_0, h) 等度有界.

证明 $\forall \alpha > \rho, \forall \tau_0 \in R^+$. 设 $x(t) = x(t; \tau_0, x_0)$ 为系统 (3.1.1) 的满足 $h_0(\tau_0^+, x_0) \leqslant \alpha$ 的任一解. 选取 $\beta = \beta(\tau_0, \alpha) > 0$ 使得

$$\beta > \max\{a^{-1}(m), \rho + 1, a^{-1}(C_k^{-1}(m)), \max_{s \in [0,\alpha]} \varphi(\tau_0^+, s)\},$$

其中 $m = \max\limits_{s \in [0,\alpha]} b(\tau_0^+, s)$,

则

$$h(\tau_0^+, x_0) \leqslant \varphi(\tau_0^+, h_0(\tau_0^+, x_0)) < \beta,$$

$$V(\tau_0^+, x_0) \leqslant b(\tau_0^+, h_0(\tau_0^+, x_0)) < m. \tag{3.1.24}$$

下证: $h(t, x(t)) < \beta, \quad t \geqslant \tau_0$.

否则，存在满足 $h_0(\tau_0^+, x_0) \leqslant \alpha$ 的系统 (3.1.1) 的某个解 $x(t) = x(t; \tau_0, x_0)$ 及 $t^* > \tau_0$ 使得

$$h(t^{*+}, x(t^{*+})) \geqslant \beta.$$

令 $q = \min\{k : t_k \geqslant \tau_0\}$, $\quad j = \max\{k : t_k \leqslant t^*\}$.

1^0　$j \geqslant q$ 情形.

若 $j > q$, 对 $k = q+1, \cdots, j$, 有

$$V(t_k^+, x(t_k^+)) - V(t_{k-1}^+, x(t_{k-1}^+)) = \Delta V(t_k, x(t_k)) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{V}\ (t, x(t))dt.$$

由 (3.1.20) 知, $\dot{V}\ (t, x(t))$ 在 $(t_{k-1}, t_k]$ 上非减, 因此由 (3.1.19) 得

$$V(t_k^+, x(t_k^+)) - V(t_{k-1}^+, x(t_{k-1}^+)) \leqslant \Delta V(t_k, x(t_k)) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{V}\ (t_k, x(t_k))dt \leqslant 0.$$

所以

$$V(t_k^+, x(t_k^+)) \leqslant V(t_{k-1}^+, x(t_{k-1}^+)), \qquad k = q+1, \cdots, j.$$

从而有

$$V(t_j^+, x(t_j^+)) \leqslant V(t_q^+, x(t_q^+)), \qquad j \geqslant q. \tag{3.1.25}$$

下证:　$V(t_q^+, x(t_q^+)) < m, \quad j \geqslant q.$

由 (3.1.21), (3.1.24) 知

$$\int_m^{V(t_q, x(t_q))} \frac{ds}{P_q(s)} < \int_{V(\tau_0^+, x_0)}^{V(t_q, x(t_q))} \frac{ds}{P_q(s)} \leqslant t_q - \tau_0 \leqslant \Delta t_q. \tag{3.1.26}$$

由 (3.1.22), (3.1.23), (3.1.26) 知

$$\begin{aligned}\int_m^{V(t_q^+, x(t_q^+))} \frac{ds}{P_q(s)} &\leqslant \Delta t_q + \int_{V(t_q, x(t_q))}^{V(t_q^+, x(t_q^+))} \frac{ds}{P_q(s)} \\ &\leqslant \Delta t_q + \int_{V(t_q, x(t_q))}^{C_q(V(t_q, x(t_q)))} \frac{ds}{P_q(s)} \\ &< 0,\end{aligned}$$

即

$$V(t_q^+, x(t_q^+)) < m.$$

结合 (3.1.25) 知

$$V(t_j^+, x(t_j^+)) < m, \qquad j \geqslant q.$$

2^0　$j < q$ 情形. 此时有 $t_j < \tau_0$.

置 $\tilde{t}=\max\{t_j,\tau_0\}$, 其中 $j\geqslant q$ 或 $j<q$. 这样我们有 $V(\tilde{t}^+,x(\tilde{t}^+))<m$. 易知 $t^*\in[\tilde{t},t_{j+1})$. 若 $t^*>\tilde{t}$, 则 t^* 是 $x(t)$ 的连续点，从而 $x(t^{*+})=x(t^*)$. 于是有

$$\Delta t_{j+1}>t^*-t_j>\int_{V(t_j^+,x(t_j^+))}^{V(t^*,x(t^*))}\frac{ds}{P_{j+1}(s)}>\int_{V(t_j^+,x(t_j^+))}^{a(h(t^*,x(t^*)))}\frac{ds}{P_{j+1}(s)}$$

$$>\int_m^{a(\beta)}\frac{ds}{P_{j+1}(s)}>\int_{C_{j+1}(a(\beta))}^{a(\beta)}\frac{ds}{P_{j+1}(s)}>\Delta t_{j+1},\quad 矛盾.$$

若 $t^*=\tilde{t}$, 则 $a(\beta)\leqslant a(h(t^{*+},x(t^{*+})))\leqslant V(\tilde{t}^+,x(\tilde{t}^+))<m<a(\beta)$, 矛盾.
所以系统 (3.1.1) 为 (h_0,h) 等度有界. □

定理 3.1.8 假设定理 3.1.7 中的 (iii)~(vi) 成立，且进一步有

(i) $h_0,h\in\Gamma$, 且 $h(t,x)\leqslant\varphi(h_0(t,x)),\varphi\in C[R_+,R_+]$;

(ii) 存在函数 $V\in V_0,a\in KR,b\in C[R_+,R_+]$, 满足

$$a(h(t,x))\leqslant V(t,x),\qquad (t,x)\in S^c(h,\rho),\rho>0,$$

$$V(t,x)\leqslant b(h_0(t,x)),\qquad (t,x)\in R_+\times R^n,$$

则系统 (3.1.1) 为 (h_0,h) 一致有界.

考虑到 h_0 与 h 的关系，我们给出另一个 (h_0,h) 一致有界的结果.

定理 3.1.9 假设定理 3.1.7 的条件 (vi) 成立，且进一步有

(i) $h_0,h\in\Gamma$, 且 $h(t,x)\leqslant\varphi(h_0(t,x))$, $\varphi\in C[R_+,R_+]$;

(ii) 存在函数 $V\in V_0,a\in KR,b\in C[R_+,R_+]$, 满足

$$a(h(t,x))\leqslant V(t,x)\leqslant b(h_0(t,x)),\qquad (t,x)\in S^c(h_0,\rho),\rho>0;$$

(iii) $\Delta t_k\dot{V}(t_k,x)+\Delta V(t_k,x)\leqslant 0,\quad k=1,2,\cdots,\quad (t_k,x)\in S^c(h_0,\rho)$;

(iv) $D^-\dot{V}(t,x)\geqslant 0,\quad (t,x)\in S^c(h_0,\rho)$;

(v) 存在函数 $P_k\in P$, 使得

$$\dot{V}(t,x)\leqslant P_k(V(t,x)),\qquad (t,x)\in(t_{k-1},t_k)\times R^n\cap S^c(h_0,\rho),$$

则系统 (3.1.1) 为 (h_0,h) 一致有界.

下面，给出 (h_0,h) 一致最终有界的结果.

定理 3.1.10 假定定理 3.1.7 的条件 (vi) 及定理 3.1.9 的条件 (ii), (iv), (v) 成立，且满足

(i) $h_0,h\in\Gamma,h(t,x)\leqslant\varphi(h_0(t,x)),\ \varphi\in KR$;

(ii) 存在函数 $c\in K$, 常数 $\mu_k\geqslant 0,k=1,2,\cdots$, 使得

$$\Delta t_k\dot{V}(t_k,x)+\Delta V(t_k,x)\leqslant-\mu_k c(V(t_k^+,x)),\tag{3.1.27}$$

其中 μ_k 满足：对于任意给定正数 C, 存在正整数 N, 使得

$$\sum_{k=q+1}^{q+N} u_k > C, \qquad \forall q \geqslant 0; \tag{3.1.28}$$

(iii) 存在常数 $A>0$, $\tilde{\rho} \geqslant \max_{s\in[0,\rho]} \varphi(s)$, 函数 $\tilde{\psi} \in C[R_+, R_+]$, 满足

$$\Delta t_k < A, V(t,x) \leqslant \tilde{\psi}(h(t,x)), \qquad (t,x) \in S^c(h,\tilde{\rho}),$$

则系统 (3.1.1) 为 (h_0, h) 一致最终有界.

证明 由定理 3.1.9 知系统 (3.1.1) 为 (h_0,h) 一致有界，从而对 $\forall \alpha > \rho$, 存在 $\beta = \beta(\alpha)$, 使得当 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \alpha$ 时，有

$$h(t, x(t;\tau_0,x_0)) < \beta, \qquad t \geqslant \tau_0.$$

下面只需证系统 (3.1.1) 为 (h_0,h) 拟一致最终有界性. 考虑到 (i), (ii), (iii), 由定理 3.1.9 知系统 (3.1.1) 为 (h,h) 一致有界，则对某一固定常数 $\tilde{\alpha} > \tilde{\rho}$, 必存在 $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(\tilde{\alpha}) > 0$, 使得当 $h(\tau_0^+, x_0) < \tilde{\alpha}$ 时，有

$$h(t, x(t;\tau_0,x_0)) < \tilde{\beta}, \qquad t \geqslant \tau_0. \tag{3.1.29}$$

设 $x(t) = x(t;\tau_0,x_0)$ 为系统 (3.1.1) 的满足 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \alpha$ 的任一解. 令 $q = \min\{k : t_k \geqslant \tau_0\}, m = \max_{s\in[0,\alpha]} b(s)$, 从定理 3.1.7 的证明过程知

$$V(t_q^+, x(t_q^+)) < m.$$

由 (3.1.28), 存在正整数 N, 使得 $\sum_{k=q+1}^{q+N} \mu_k > \dfrac{m}{c(a(\tilde{\alpha}))}$.

令 $T = (N+1)A$, 下证：存在 $\tilde{t} \in [\tau_0, \tau_0 + T]$, 满足 $h(\tilde{t}^+, x(\tilde{t}^+)) < \tilde{\alpha}$.

否则，存在系统 (3.1.1) 的满足 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \alpha$ 的某解 $x(t) = x(t;\tau_0,x_0)$, 使得 $h(t^+, x(t^+)) \geqslant \tilde{\alpha}, t \in [\tau_0, \tau_0+T]$. 由 (i) 得 $h_0(t^+, x(t^+)) \geqslant \varphi^{-1}(\tilde{\alpha}), t \in [\tau_0, \tau_0+T]$.

选取 $\tilde{\alpha}$ 充分大，可使 $h_0(t^+, x(t^+)) > \varphi^{-1}(\tilde{\alpha}) > \rho$. 由 (3.1.20), (3.1.27) 得

$$V(t_k^+, x(t_k^+)) \leqslant V(t_{k-1}^+, x(t_{k-1})) - \mu_k c(V(t_k^+, x(t_k^+))), \qquad k = q+1, \cdots, q+N.$$

由 T 的取法知 $t_{q+N} \in [\tau_0, \tau_0+T]$, 从而有

$$\begin{aligned} V(t_{q+N}^+, x(t_{q+N}^+)) &\leqslant V(t_q^+, x(t_q^+)) - \sum_{k=q+1}^{q+N} \mu_k c(V(t_k^+, x(t_k^+))) \\ &< m - c(a(\tilde{\alpha})) \sum_{k=q+1}^{q+N} \mu_k \\ &< 0, \quad \text{矛盾}. \end{aligned}$$

所以必存在 $\tilde{t}\in[\tau_0,\tau_0+T]$, 满足 $h(\tilde{t},x(\tilde{t}))<\tilde{\alpha}$. 由 (3.1.29) 知 $h(t,x(t))<\tilde{\beta}(\tilde{\alpha})$, $t\geqslant \tau_0+T$. □

注 3.1.5 若 (3.1.28) 被减弱为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_k=\infty$, 则系统 (3.1.1) 为 (h_0,h) 等度最终有界.

例 3.1.2 考虑脉冲微分系统

$$\begin{cases} x_1'=\left(\dfrac{1}{2}+\cos t\right)x_1+\dfrac{1}{8}x_2, & t\neq \dfrac{k}{8}\pi,\\ x_2'=-\dfrac{1}{8}x_1+\left(-\dfrac{1}{2}+\cos t\right)x_2, & t\neq \dfrac{k}{8}\pi,\\ \Delta x_1=-x_1+\dfrac{1}{2}x_2, & t=\dfrac{k}{8}\pi,\\ \Delta x_2=-\dfrac{3}{5}x_1-x_2, & t=\dfrac{k}{8}\pi,\quad k=1,2,\cdots. \end{cases} \tag{3.1.30}$$

选取 $V(t,x)=\dfrac{1}{2}e^{-2\sin t}(x_1^2+x_2^2)$, 则

$$\dot{V}(t,x)=\frac{1}{2}e^{-2\sin t}(x_1^2-x_2^2)\leqslant V(t,x), \tag{3.1.31}$$

$$\ddot{V}(t,x)=\frac{1}{2}e^{-2\sin t}\left(x_1^2+\frac{1}{2}x_1x_2+x_2^2\right)\geqslant 0,$$

$$\Delta t_k\dot{V}(t_k,x)+\Delta V(t_k,x)=\frac{1}{2}e^{-2\sin t_k}(-0.24731x_1^2-1.14269x_2^2)\leqslant 0,$$

$$V(t_k^+,x(t_k^+))=\frac{1}{2}e^{-2\sin t_k}(0.36x_1^2+0.25x_2^2)\leqslant \frac{1}{2}V(t_k,x(t_k)). \tag{3.1.32}$$

由 (3.1.31), (3.1.32) 知, 可取 $P_k(s)=s$, $C_k(\sigma)=\dfrac{1}{2}\sigma$. 又

$$\Delta t_k+\int_\sigma^{C_k(\sigma)}\frac{ds}{P_k(s)}=\frac{\pi}{8}+\int_\sigma^{\frac{1}{2}\sigma}\frac{ds}{s}=\frac{\pi}{8}+\ln\frac{1}{2}=-0.3004<0.$$

选取 $h_0(t,x)=h(t,x)=x_1^2+x_2^2, a(r)=\frac{1}{2}e^{-2}r, b(r)=e^2r$. 这样定理 3.1.8 的所有条件都满足, 从而系统 (3.1.30) 的零解一致有界.

再来看脉冲微分系统关于两个测度的实际稳定性.

在研究非线性系统的稳定性时, 常会遇到这样的情形: 由于实际条件的限制, 一个具体系统在严格意义上是不稳定的. 但当初值有界时, 该系统的解从初始时刻开始在一定范围内变化, 此时从实际角度来看, 我们可以认为该系统是稳定的, 这便是实际稳定性概念的由来. 这一节我们仍然运用广义二阶导数方法来研究系统 (3.1.1) 的关于两个测度的实际稳定性.

首先给出关于系统 (3.1.1) 的 (h_0,h) 实际稳定性的定义.

定义 3.1.10　设 $h_0, h \in \Gamma, x(t) = x(t; \tau_0, x_0)$ 为系统 (3.1.1) 的任意解，称系统 (3.1.1) 为

(i) (h_0, h) 一致实际稳定：若对给定 (λ, A), 其中 $0 < \lambda < A, \forall \tau_0 \in R_+$, 有当 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \lambda$ 时,

$$h(t, x(t)) < A, \qquad t \geqslant \tau_0;$$

(ii) (h_0, h) 一致实际渐近稳定：若 (i) 及 (h_0, h) 一致吸引 $(\delta = \lambda)$ 同时成立.

定理 3.1.11　假设定理 3.1.7 的 (iii)~(vi) 成立，且进一步有

(i) $0 < \lambda < A$;

(ii) $h_0, h \in \Gamma$, 且存在 $\varphi \in K$, 使得 $h(t, x) \leqslant \varphi(h_0(t, x)), (t, x) \in S(h_0, \lambda)$;

(iii) 存在函数 $V \in V_0, a, b \in K$, 使得

$$\text{当 } h(t,x) < \rho \text{ 时}, \qquad \text{有 } b(h(t,x)) \leqslant V(t,x);$$
$$\text{当 } h_0(t,x) < \lambda \text{ 时}, \qquad \text{有 } V(t,x) \leqslant a(h_0(t,x));$$

(iv) $\varphi(\lambda) < A, \quad a(\lambda) < b(A)$;

(v) 当 $(t_k, x) \in S(h, A)$ 时，有 $(t_k^+, x + I(t_k, x)) \in S(h, \rho), \quad k = 1, 2, \cdots$;

(vi) $\displaystyle\int_{a(\lambda)}^{b(A)} \frac{ds}{P_k(s)} \geqslant \Delta t_k$, $k = 1, 2, \cdots$, 其中 P_k 为定理 3.1.7(v) 中所指函数,

则系统 (3.1.1) 为 (h_0, h) 一致实际稳定.

证明　$\forall \tau_0 \in R_+$, 令 $q = \min\{k : t_k \geqslant \tau_0\}$. 设 $x(t) = x(t; \tau_0, x_0)$ 为系统 (3.1.1) 的满足 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \lambda$ 的任一解，则有

$$h(\tau_0^+, x_0) \leqslant \varphi(h_0(\tau_0^+, x_0)) < \varphi(\lambda) < A, \tag{3.1.33}$$

$$V(\tau_0^+, x_0) \leqslant a(h_0(\tau_0^+, x_0)) < a(\lambda). \tag{3.1.34}$$

下证：　$h(t, x(t)) < A, \quad t \geqslant \tau_0$.

否则，存在系统 (3.1.1) 的满足 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \lambda$ 的某解 $x(t) = x(t; \tau_0, x_0)$ 及 $\tilde{t} > \tau_0, t_j < \tilde{t} \leqslant t_{j+1}$, 某$j \in N$, 使得

$$h(\tilde{t}^+, x(\tilde{t}^+)) \geqslant A, \quad h(t, x(t)) < A, \qquad t \in [\tau_0, t_j].$$

由 (v), 能找到 $t^*, t_j < t^* \leqslant \tilde{t}$, 使得

$$A \leqslant h(t^{*+}, x(t^{*+})) < \rho, h(t, x(t)) < \rho, \qquad t \in [\tau_0, t^*].$$

1°　$j \geqslant q$ 情形.

若 $j > q$, 对 $k = q + 1, \cdots, j$, 类似定理 3.1.1 中得

$$V(t_k^+, x(t_k^+)) \leqslant V(t_{k-1}^+, x(t_{k-1}^+)), \qquad k = q + 1, \cdots, j,$$

从而

$$V(t_j^+, x(t_j^+)) \leqslant V(t_q^+, x(t_q^+)), \qquad j \geqslant q. \tag{3.1.35}$$

下证: $V(t_q^+, x(t_q^+)) < a(\lambda), \quad j \geqslant q.$

由 (3.1.34), (3.1.35) 得 $\displaystyle\int_{a(\lambda)}^{V(t_q, x(t_q))} \frac{ds}{P_q(s)} < \int_{V(\tau_0^+, x_0)}^{V(t_q, x(t_q))} \frac{ds}{P_q(s)} \leqslant t_q - \tau_0 \leqslant \Delta t_q.$

所以有

$$\int_{a(\lambda)}^{V(t_q^+, x(t_q^+))} \frac{ds}{P_q(s)} \leqslant \Delta t_q + \int_{V(t_q, x(t_q))}^{C_q(V(t_q, x(t_q))} \frac{ds}{P_q(s)} < 0.$$

结合 (3.1.35) 知

$$V(t_j^+, x(t_j^+)) < a(\lambda), \qquad j \geqslant q. \tag{3.1.36}$$

2° $j < q$ 情形. 此时有 $t_j < \tau_0$.

置 $\tilde{t} = \max\{t_j, \tau_0\}$, 其中 $j \geqslant q$ 或 $j < q$. 则由 (3.1.34), (3.1.36) 知 $V(\tilde{t}^+, x(\tilde{t}^+)) < a(\lambda)$. 易知 $t^* \in [\tilde{t}, t_{j+1})$. 若 $t^* > \tilde{t}$, 则 t^* 是 $x(t)$ 的连续点, 从而 $x(t^{*+}) = x(t^*)$, 则

$$\Delta t_{j+1} > t^* - t_j > \int_{V(\tilde{t}^+, x(\tilde{t}^+))}^{V(t^*, x(t^*))} \frac{ds}{P_{j+1}} > \int_{a(\lambda)}^{b(h(t^*, x(t^*)))} \frac{ds}{P_{j+1}} > \int_{a(\lambda)}^{b(A)} \frac{ds}{P_{j+1}} \geqslant \Delta t_{j+1}, \text{矛盾}.$$

若 $t^* = \tilde{t}$, 则 $\quad b(A) \leqslant b(h(t^{*+}, x(t^{*+}))) \leqslant V(\tilde{t}^+, x(\tilde{t}^+)) < a(\lambda) < b(A), \quad$ 矛盾.

所以, 系统 (3.1.1) 为 (h_0, h) 一致实际稳定. □

定理 3.1.12 设定理 3.1.11 的条件 (i)~(vi), 定理 3.1.7 的 (iv)~(vi) 及定理 3.1.10 的 (ii) 成立, 且进一步有 $(*)\Delta t_k \leqslant A, \ A \geqslant 0; s \geqslant P_k(s), s \geqslant 0$, 则系统 (3.1.1) 为 (h_0, h) 一致实际渐近稳定.

证明 $\forall \varepsilon > 0, \forall \tau_0 \in R_+$. 由定理 3.1.11 知, 系统 (3.1.1) 为 (h_0, h) 一致实际稳定, 从而有若 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \lambda$, 则

$$h(t, x(t)) < A, \qquad t \geqslant \tau_0,$$

其中 $x(t) = x(t; \tau_0, x_0)$ 为系统 (3.1.1) 的满足 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \lambda$ 的任一解.

下面只需证 (h_0, h) 一致吸引性 $(\delta = \lambda)$.

先证: 存在 $T = T(\varepsilon)$ 及 $t_k \in [\tau_0, \tau_0 + T]$, 满足

$$V(t_k^+, x(t_k^+)) < \frac{b(\varepsilon)}{e^A}. \tag{3.1.37}$$

若不然, 存在系统 (3.1.1) 的满足 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \lambda$ 的某个解 $x(t)$, 对 $\forall T > 0$, 有

$$V(t_k^+, x(t_k^+)) \geqslant \frac{b(\varepsilon)}{e^A}, \qquad \forall t_k \in [\tau_0, \tau_0 + T).$$

令 $q=\min\{k:t_k\geqslant\tau_0\}$, $q+N=\max\{k:t_k<\tau_0+T\}$. 同定理 3.1.10 的证明可得

$$V(t_{q+N}^+,x(t_{q+N}^+))\leqslant V(t_q^+,x(t_q^+))-\sum_{k=q+1}^{q+N}\mu_k c\left(\frac{b(\varepsilon)}{e^A}\right). \tag{3.1.38}$$

由定理 3.1.11 的证明过程知

$$V(t_q^+,x(t_q^+))\leqslant a(\lambda).$$

所以得

$$V(t_{q+N}^+,x(t_{q+N}^+))\leqslant a(\lambda)-c\left(\frac{b(\varepsilon)}{e^A}\right)\sum_{k=q+1}^{q+N}\mu_k.$$

由定理 3.1.10 的 (ii) 知，可以取 T 充分大，满足

$$\sum_{k=q+1}^{q+N}\mu_k>\frac{a(\lambda)}{c\left(\dfrac{b(\varepsilon)}{e^A}\right)}. \tag{3.1.39}$$

此时 $V(t_{q+N}^+,x(t_{q+N}^+))<0$, 矛盾. 从而 (3.1.37) 成立.

再证：对于 $t\in(t_{k-1},t_k], k=2,3,\cdots$, 有

$$V(t,x(t))\leqslant e^A V(t_{k-1}^+,x(t_{k-1}^+)). \tag{3.1.40}$$

事实上，由定理 3.1.7 的 (v) 得

$$\int_{V(t_{k-1}^+,x(t_{k-1}^+))}^{V(t,x(t))}\frac{ds}{P_k(s)}\leqslant\Delta t_k,\qquad t\in(t_{k-1},t_k). \tag{3.1.41}$$

由 (i) 得

$$\int_{V(t_{k-1}^+,x(t_{k-1}^+))}^{V(t,x(t))}\frac{ds}{P_k(s)}\geqslant\int_{V(t_{k-1}^+,x(t_{k-1}^+))}^{V(t,x(t))}\frac{ds}{s}=\ln\frac{V(t,x(t))}{V(t_{k-1}^+,x(t_{k-1}^+))}. \tag{3.1.42}$$

联立 (3.1.41)~(3.1.42) 得 $\ln\dfrac{V(t,x(t))}{V(t_{k-1}^+,x(t_{k-1}^+))}\leqslant\Delta t_k\leqslant A$, 即 (3.1.40) 成立.

假定 $T=T(\varepsilon)$ 如 (3.1.39) 所定义， $t_k\in[\tau_0,\tau_0+T)$ 满足

$$V(t_k^+,x(t_k^+))<\frac{b(\varepsilon)}{e^A}.$$

由 (3.1.37),(3.1.40) 得

$$V(t,x(t))<b(\varepsilon),\qquad t>t_k.$$

利用定理 3.1.11 的 (iii) 得

$$h(t, x(t)) < \varepsilon, \qquad t \geqslant \tau_0 + T.$$

所以系统 (3.1.1) 为 (h_0, h) 一致吸引 $(\delta = \lambda)$, 从而系统 (3.1.1) 为 (h_0, h) 一致实际渐稳. □

例 3.1.3 考虑如下脉冲微分系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left(\dfrac{1}{4} + \cos t\right) x_1 + \dfrac{1}{8} x_6, & t \neq \dfrac{k\pi}{8}, \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{8} x_1 + \left(-\dfrac{1}{2} + \cos t\right) x_5, & t \neq \dfrac{k\pi}{8}, \\ \Delta x_1 = -x_1 + \dfrac{1}{4} x_2, & t = \dfrac{k\pi}{8}, \\ \Delta x_2 = -\dfrac{3}{5} x_1 - x_2, & t = \dfrac{k\pi}{8}, k = 1, 2, \cdots. \end{cases} \tag{3.1.43}$$

令 $V(t, x) = \dfrac{1}{3} e^{-2\sin t}(x_1^2 + x_2^2)$, 则

$$\dot{V}(t, x) = \frac{1}{2} e^{-2\sin t}(x_1^2 - x_2^2) \leqslant V(t, x),$$

$$\ddot{V}(t, x) = \frac{1}{2} e^{-2\sin t}\left(x_1^2 + \frac{1}{2} x_1 x_2 + x_2^2\right) \geqslant 0,$$

$$\Delta t_k \dot{V}(t_k, x) + \Delta V(t_k, x) = \frac{1}{2} e^{-2\sin t_k}(-2.24731 x_1^2 - 1.14269 x_2^5) \leqslant 0,$$

$$V(t_k^+, x(t_k^+)) = \frac{1}{2} e^{-2\sin t_k}(0.36 x_1^2 + 0.25 x_2^2) \leqslant V(t_k, x(t_k)).$$

取 $E_k(s) = s, C_k(\sigma) = \dfrac{1}{4}\sigma$, 我们得到

$$\Delta t_k + \int_{\sigma}^{C_k(\sigma)} \frac{ds}{P_k(s)} = \frac{\pi}{8} + \int_{\sigma}^{\frac{1}{2}\sigma} \frac{ds}{s} = \frac{\pi}{8} + \ln\frac{1}{2} = -0.5004 < 0.$$

选取 $h_0(t, x) = h(t, x) = x_1^2 + x_2^2$, $a(r) = e^2 r, b(r) = \dfrac{1}{2} e^{-2} r, 0 < \lambda < A$, 其中 $2e^4 \lambda + 2e^{2+\frac{\pi}{8}} \leqslant A$. 显然, 定理 3.1.11 的所有条件均满足, 于是系统 (3.1.43) 为 (h_0, h) 一致实际稳定的.

最后讨论脉冲微分系统关于两个测度的最终稳定性. 在实际中有时只需研究解的最终状态, 譬如最终一致稳定及最终一致渐近稳定性. 下面利用广义二阶导数方法给出判定脉冲微分系统 (1) 的最终稳定性的充分条件.

首先给出相关定义.

定义 3.1.11 设 $h_0, h \in \Gamma, x(t) = x(t; \tau_0, x_0)$ 为系统 (3.1.1) 的任一解，称系统 (3.1.1) 为

(i) (h_0, h) 最终一致稳定：如果对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \tau = \tau(\varepsilon) > 0$, 使得当 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \delta$ 时，有

$$h(t, x(t)) < \varepsilon, \qquad t \geqslant \tau_0 \geqslant \tau;$$

(ii) (h_0, h) 拟最终一致渐近稳定：如果存在 $\delta_0, t_0 > 0$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $T = T(\varepsilon) > 0$, 使得当 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \delta$ 时，有

$$h(t, x(t)) < \varepsilon, \qquad t \geqslant \tau_0 + T, \quad \tau_0 \geqslant t_0;$$

(iii) (h_0, h) 最终一致渐近稳定：如果 (i) 与 (ii) 同时成立.

定理 3.1.13 假设

(i) $h_0, h \in \Gamma, h_0$ 比 h 一致地好；

(ii) 存在 $0 < \rho_0 < \rho$, 使得若 $(t_k, x) \in S(h, \rho_0)$, 则 $(t_k^+, x + I(t_k, x)) \in S(h, \rho), k = 1, 2, \cdots$;

(iii) $\forall \beta > 0$, 存在 $\alpha > 0$, 满足 $h_0(t_k, x) < \alpha$ 时，有 $h_0(t_k^+, x + I(t_k, x)) < \beta, k = 1, 2, \cdots$;

(iv) 存在函数 $V \in V_0, a, b \in K, \theta \in L$ 使得

$$b(h(t, x)) \leqslant V(t, x) \leqslant a(h_0(t, x)), \qquad (t, x) \in S(h, \rho) \cap S^c(h_0, r), \quad t \geqslant \theta(r);$$

(v) $\Delta t_k \dot{V}(t_k, x) + \Delta V(t_k, x) \leqslant 0, \qquad (t_k, x) \in S(h, \rho) \cap S^c(h_0, r),\ t_k \geqslant \theta(r)$;

(vi) $D^- \dot{V}(t, x) \geqslant 0, \qquad (t, x) \in S(h, \rho) \cap S^c(h_0, r),\ t \geqslant \theta(r)$;

(vii) $V(t, x(t))$ 在 (t_{k-1}, t_k) 上一致有界增长；

(viii) $V(t, x(t))$ 在 t_k 处一致有界增长，

则系统 (3.1.1) 为 (h_0, h) 最终一致稳定.

证明 $\forall \varepsilon \in (0, \rho_0), \forall \tau_0 \in R_+$. 由 (i), 存在函数 $\varphi \in K$, 常数$\delta_1 > 0$, 使得当 $h_0(t, x) < \delta_1$ 时，有

$$h(t, x) \leqslant \varphi(h_0(t, x)). \tag{3.1.44}$$

由于 V 在 (t_{k-1}, t_k) 上一致有界增长，存在函数 $P_k \in P$ 使得

$$\dot{V}(t, x) \leqslant P_k(V(t, x)), \qquad (t, x) \in S(h, \rho), t \in (t_{k-1}, t_k), \tag{3.1.45}$$

且存在 $v_1 = v_1(\varepsilon) \leqslant b(\varepsilon)$ 使得

$$\int_{v_1}^{b(\varepsilon)} \frac{ds}{P_k(s)} \geqslant \Delta t_k, \qquad k = 1, 2, \cdots. \tag{3.1.46}$$

由于 V 在 $t_k, k=1,2,\cdots$ 处一致有界增长，则存在常数 $v_2 = v_2(\varepsilon) < v_1$, 使得当 $V(t_k, x(t_k)) < v_2$ 时，有

$$V(t_k^+, x(t_k^+)) < v_1. \tag{3.1.47}$$

再次利用 V 在 (t_{k-1}, t_k) 上一致有界增长，则存在 $v_0 = v_0(\varepsilon) < v_2$, 使得 $\int_{v_0}^{v_2} \frac{ds}{P_k(s)} \geqslant \Delta t_k$. 选取 $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0, \delta_3 = \delta_3(\varepsilon) > 0$, 使得 $a(\delta_2) < v_0$, $\varphi(\delta_3) < \varepsilon$. 由 (iii), 存在 $\delta_4 > 0$ 满足 $h_0(t_k, x) < \delta_4$ 时，$h_0(t_k^+, x + I(t_k, x)) < \delta_2$. 令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$, 取 $\tau(\varepsilon) = \theta(\delta(\varepsilon))$. 若 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \delta, \tau_0 \geqslant \tau(\varepsilon)$, 则

$$h(\tau_0^+, x_0) \leqslant \varphi(h_0(\tau_0^+, x)) < \varphi(\delta_3) < \varepsilon.$$

设 $x(t) = x(t; \tau_0, x_0)$ 为系统 (3.1.1) 的满足 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \delta$ 的任一解.

下证： $h(t, x(t)) < \varepsilon, \quad t \geqslant \tau_0 \geqslant \tau(\varepsilon)$.

否则，存在满足 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \delta$ 的系统 (3.1.1) 的解 $x(t)$ 及 $\tau(\varepsilon) \leqslant \tau_0 < t^* \leqslant \tilde{t}^*$, 其中 $t_n < t^* \leqslant t_{n+1}, t_m < \tilde{t}^* \leqslant t_{m+1}, n, m \in N, n \leqslant m$, 满足

$$\delta \leqslant h_0(t^*, x(t^*)), \quad h_0(t, x(t)) < \delta, \qquad t \in [\tau_0, t_n],$$

$$\varepsilon \leqslant h(\tilde{t}^*, x(\tilde{t}^*)), \quad h(t, x(t)) < \varepsilon, \qquad t \in [\tau_0, t_m].$$

由于 $\delta \in (0, \delta_4), \varepsilon \in (0, \rho_0)$, 结合 (ii), (iii) 知

$$h_0(t_n^+, x_n + I(t_n, x_n)) < \delta_2, \qquad h(t_m^+, x_m + I(t_m, x_m)) < \rho,$$

其中 $x_n = x(t_n)$, $x_m = x(t_m)$.

因此可找到满足 $t_n < t^0 < t^*, t_m < \tilde{t}^0 < \tilde{t}^*, t^0 < \tilde{t}^0$ 的 t^0 及 $\tilde{t}^0$ 使得

$$\delta \leqslant h_0(t^0, x(t^0)) < \delta_2, \quad h_0(t, x(t)) < \delta_2, \qquad t \in [\tau_0, t^0],$$

$$\varepsilon \leqslant h(\tilde{t}^0, x(\tilde{t}^0)) < \rho, \qquad h(t, x(t)) < \rho, \qquad t \in [\tau_0, \tilde{t}^0].$$

$$\delta \leqslant h_0(t, x(t)), \qquad t \in [t^0, \tilde{t}^0].$$

于是得

$$(t, x(t)) \in S(h, \rho) \cap S^c(h_0, \delta), \qquad t \in [t^0, \tilde{t}^0].$$

令 $q = \min\{k : t_k \geqslant t^0\}$, $j = \max\{k : t_k \leqslant \tilde{t}^0\}$. 又

$$V(\tau_0^+, x(\tau_0^+)) < a(h_0(\tau_0^+, x(\tau_0^+)) < a(\delta_2) < v_0.$$

接下来类似定理 3.1.1 的证明可推出矛盾，从而证明了系统 (3.1.1) 为 (h_0, h) 一致最终稳定. □

定理 3.1.14 设定理 3.1.13 中除 (v) 外其余条件全部成立，且进一步有

(i) $\Delta t_k < A$, $A \geqslant 0$为常数, V 为 h 渐小;

(ii) 存在函数 $c \in K, \theta \in L$ 使得

$$\Delta t_k \dot{V}(t_k,x)+\Delta V(t_k,x) \leqslant -\mu_k c(h_0(t_k,x)), \quad (t_k,x)\in S(h,\rho)\cap S^c(h_0,r), t_k \geqslant \theta(r);$$

(iii) 对任意给定正数 C, 存在正整数 N, 满足 $\sum\limits_{k=q+1}^{q+N} \mu_k > C, \quad \forall q \geqslant 0,$

则系统 (3.1.1) 为 (h_0, h) 最终一致渐近稳定.

证明 由 V 为 h 渐小，存在函数 $\phi \in K$, 常数 $\alpha_0 > 0$, 使当 $h(t,x) < \alpha_0$ 时，有

$$V(t,x) \leqslant \phi(h(t,x)). \tag{3.1.48}$$

据定理 3.1.13 知，系统 (3.1.1) 为 (h_0,h) 最终一致稳定，则对 $\forall \varepsilon \in (0,\rho)$, 存在相应的 $\delta = \delta(\varepsilon), \tau = \tau(\varepsilon) = \theta(\delta(\varepsilon))$, 使得当 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \delta$ 时，有

$$h(t,x(t)) < \varepsilon, \qquad t \geqslant \tau_0 \geqslant \tau(\varepsilon). \tag{3.1.49}$$

令 $\varepsilon = \rho_0$, 其中 $\rho_0 = \min(\rho, \alpha_0)$, 则存在常数 $\delta_0, \tau_1 > 0$, 使得当 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \delta_0$ 时，有

$$h(t,x(t)) < \rho_0, \qquad t \geqslant \tau_0 \geqslant \tau_1. \tag{3.1.50}$$

由 (iii), 存在 $N = N(\varepsilon)$, 使

$$\sum_{k=q+1}^{q+N} \mu_k > \frac{\phi(\rho_0)}{c(\delta(\varepsilon))}.$$

令 $T = \tau(\varepsilon) + (N+1)A$, 注意到 $t_{q+N} \leqslant \tau_0 + T$. 设 $x(t) = x(t;\tau_0,x_0)$ 为系统 (3.1.1) 的满足 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \delta_0$ 的任一解， $\tau_0 \geqslant \tau_1$.

下证：存在 $t^* \in [\tau_0 + \tau(\varepsilon), \tau_0 + T]$, 使得 $h_0(t^*, x(t^*)) < \delta(\varepsilon)$.

否则，存在满足 $h_0(\tau_0^+, x_0) < \delta_0$ 的某解 $x(t)$, 使对 $\forall t \in [\tau_0 + \tau(\varepsilon), \tau_0 + T]$ 有 $h_0(t, x(t)) \geqslant \delta(\varepsilon)$. 令 $q = \min\{k : t_k \geqslant \tau_0 + \tau(\varepsilon)\}$, 结合 (3.1.59), (3.1.61) 得

$$V(t_q^+, x(t_q^+)) < \phi(h(t_q^+, x(t_q^+))) < \phi(\rho_0). \tag{3.1.51}$$

类似定理 3.1.3 中证明，由 (3.1.51) 得

$$\begin{aligned} V(t_{q+N}^+, x(t_{q+N}^+)) &\leqslant V(t_q^+, x(t_q^+)) - \sum_{k=q+1}^{q+N} \mu_k c(h_0(t_k, x(t_k))) \\ &< \phi(\rho_0) - \sum_{k=q+1}^{q+N} \mu_k c(\delta(\varepsilon)) \\ &< 0, \quad \text{矛盾}. \end{aligned}$$

由 (h_0, h) 最终一致稳定知

$$h(t, x(t)) < \varepsilon, \qquad t \geqslant t^*.$$

所以有

$$h(t, x(t)) < \varepsilon, \qquad t \geqslant \tau_0 + T. \qquad \square$$

§3.2 脉冲微分系统关于两个测度的有界性

本节借助 Lyapunov 第二方法的思想，我们研究脉冲微分系统两个测度的有界性问题.

我们考虑脉冲微分系统

$$\begin{cases} x' = f(t, x), & t \neq \tau_k, \\ \Delta x = I(t, x), & t = \tau_k, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

其中 $\Delta x(\tau_k) = x(\tau_k^+) - x(\tau_k), k = 1, 2, \cdots, 0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_k < \cdots, \lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = \infty, f, I : R_+ \times R^n \to R^n$ 在 $(\tau_{k-1}, \tau_k] \times R^n$ 上连续且 $f(\tau_k^+, x), I(\tau_k^+, x)$ 存在， $f(\cdot, 0) = I(\cdot, 0) \equiv 0$.

下面，我们定义一些函数类并给出系统的两个测度的有界性的定义.

$K = [\sigma \in C[R_+, R_+], \sigma(0) = 0, \sigma(s)$ 严格单增];

$\nu_0 = [V(t, x) : R_+ \times R^n \to R_+$, 在 $(\tau_{k-1}, \tau_k] \times R^n$ 上连续，关于 x 满足局部 Lipschitz 条件且 $\lim\limits_{t\to\tau_k^+} V(t, x) = V(\tau_k^+, x)$ 存在， $k = 1, 2, \cdots]$;

$K_0 = [\sigma \in C[R_+, R_+], \sigma(0) = 0$, 且当 $s > 0$ 时， $\sigma(s) > 0]$;

$KR = [\sigma \in K$ 且 $\lim\limits_{s\to\infty} \sigma(s) = \infty]$;

$PC = [\sigma : R_+ \to R$ 在 $(\tau_{k-1}, \tau_k]$ 上连续且 $\lim\limits_{t\to\tau_k^+} \sigma(t) = \sigma(\tau_k^+)$ 存在];

$\Gamma = [h : R_+ \times R^n \to R_+, \forall x \in R^n, h(\cdot, x) \in PC, \forall t \in R_+, h(t, \cdot) \in C[R^n, R_+]$ 且 $\inf h(t, x) = 0]$;

$PCK = [\sigma : R_+ \times R_+ \to R_+$, 对于 $\forall u \in R_+, \sigma(\cdot, u) \in PC$, 对于 $\forall t \in R_+, \sigma(t, \cdot) \in K]$.

定义 3.2.1 $V \in \nu_0$, 则对 $\forall (t, x) \in (\tau_{k-1}, \tau_k) \times R^n, V(t, x)$ 关于系统 (3.2.1) 的右上导数定义为

$$D^+_{(3.2.1)} V(t, x) = \limsup_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta} [V(t + \delta, x + \delta f(t, x)) - V(t, x)].$$

在脉冲时刻 $V(t, x)$ 关于 (3.2.1) 的离散部分的差分定义为

$$\Delta V(\tau_k, x) = V(\tau_k^+, x + I(\tau_k, x)) - V(\tau_k, x), \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

定义 3.2.2 令 $V \in \nu_0$, V 称为

(i) h 正定, 如果存在常数 $\rho > 0$ 及函数 $b \in K$ 满足 $h(t,x) < \rho$ 时, $b(h(t,x)) \leqslant V(t,x)$;

(ii) h 弱渐小, 如果存在常数 $\delta > 0$ 及函数 $\alpha \in PCK$, 满足 $h(t,x) < \delta$ 时, $V(t,x) \leqslant \alpha(t, h(t,x))$;

(iii) h 渐小, 如果在 (ii) 中 $\alpha \in K$.

定义 3.2.3 设 $x(t) = x(t, t_0^+, x_0)$ 是系统 (3.2.1) 的任意解, 系统 (3.2.1) 称作

(i) (h_0, h) 有界, 如果给定 $\alpha > 0, t_0 \in R_+$, 存在 $\beta = \beta(t_0, \alpha)$, 满足 $h_0(t_0^+, x_0) < \alpha$ 时, $h(t, x(t)) < \beta, t \geqslant t_0$;

(ii) (h_0, h) 拟等度最终有界, 如果存在 $\beta > 0$, 任给 $\alpha > 0, t_0 \in R_+$, 存在 $T = T(t_0, \alpha) > 0$ 满足 $h_0(t_0^+, x_0) < \alpha$ 时, $h(t, x(t)) < \beta, t \geqslant t_0 + T$;

(iii) (h_0, h) 等度最终有界, 如果 (i), (ii) 同时成立;

(iv) (h_0, h) 一致有界, 如果在 (i) 中 β 与 t_0 无关;

(v) (h_0, h) 拟一致最终有界, 如果在 (ii) 中 T 与 t_0 无关;

(vi) (h_0, h) 一致最终有界, 如果 (iv), (v) 同时成立.

关于两个测度稳定性有界性的基本概念及基本定理可参考文献 [10].

定理 3.2.1 假定

(i) $h_0, h \in \Gamma, V \in \nu_0$, 存在函数 $a \in KR, \varphi, b \in PCC$, 满足

$$h(t,x) \leqslant \varphi(t, h_0(t,x)), \tag{3.2.1}$$

$$a(h(t,x)) \leqslant V(t,x), \qquad (t,x) \in S^c(h, \rho), \tag{3.2.2}$$

$$V(t,x) \leqslant b(t, h_0(t,x)), \tag{3.2.3}$$

其中 ρ 为一正常数;

(ii) 存在函数 $C_k \in K_0$ 及常数 $\mu_k, k = 1, 2, \cdots$, 满足

$$D^+V(t,x) \leqslant \frac{\mu_k}{\Delta\tau_k} C_k(V(t,x)), \qquad (t,x) \in (\tau_{k-1}, \tau_k) \times R^n, \tag{3.2.4}$$

$$s \geqslant \mu_k C_k(s), \qquad s > \rho, \tag{3.2.5}$$

其中 $\Delta\tau_k = \tau_k - \tau_{k-1}$;

(iii) 存在常数 ν_k 及函数 $d_k \in K_0, k = 1, 2, \cdots$, 满足

$$\Delta V(\tau_k, x) \leqslant \nu_k d_k(V(\tau_k, x)); \tag{3.2.6}$$

(iv) 存在常数 $\gamma_k \geqslant 0, k = 1, 2, \cdots$, 满足

$$\mu_k + \int_\sigma^{\sigma + \nu_k d_k(\sigma)} \frac{ds}{C_k(s)} \leqslant -\gamma_k, \qquad \sigma \geqslant 0, \tag{3.2.7}$$

则系统 (3.2.1) 是 (h_0, h) 有界的.

证明 任给 $t_0 \in R^+, \alpha > 0$, 令 $q = \min\{k : \tau_k \geqslant t_0\}$. 我们选取 $\beta_1 = \beta_1(t_0, \alpha) > 0$, 满足

$$\beta_1 > \max\{m + |\nu_q| \max_{s\in[0,m]} d_q(s), \rho\}, \tag{3.2.8}$$

其中 $m = \max_{s\in[0,\alpha]} b(t_0^+, s)$. 选取 $\beta = \beta(t_0, \alpha)$, 满足

$$\beta > \max\{a^{-1}(e\beta_1) + 1, \max_{s\in[0,\alpha]} \varphi(t_0^+, s) + 1, \rho + 1\}.$$

由 (3.2.1) 可知若 $h_0(t_0^+, x_0) < \alpha$ 则

$$h(t_0^+, x_0) < \beta - 1 < \beta.$$

对于系统 (3.2.1) 的满足 $h_0(t_0^+, x_0) < \alpha$ 的任意解 $x(t) = x(t, t_0^+, x_0)$, 可得

$$h(t, x(t)) < \beta, \qquad t \geqslant t_0.$$

若不然, 存在解 $x(t) = x(t, t_0^+, x_0), h_0(t_0^+, x_0 < \alpha$ 及 $\widetilde{t} > t_0$, 满足 $h(\widetilde{t}^+, x(\widetilde{t}^+)) \geqslant \beta - 1$. 令 $j = \max\{k : \tau_k \leqslant \widetilde{t}\}$. 如果 $j > q$, 则对于 $k = q+1, \cdots, j$, 由 (3.2.4),(3.2.6) 得

$$\int_{V(\tau_{k-1}^+, x(\tau_{k-1}^+))}^{V(\tau_k, x(\tau_k))} \frac{ds}{C_k(s)} \leqslant \mu_k \tag{3.2.9}$$

及

$$\int_{V(\tau_k, x(\tau_k))}^{V(\tau_k^+, x(\tau_k^+))} \frac{ds}{C_k(s)} \leqslant \int_{V(\tau_k, x(\tau_k))}^{V(\tau_k, x(\tau_k)) + \nu_k d_k(V(\tau_k, x(\tau_k))} \frac{ds}{C_k(s)},$$

与 (3.2.7) 联立可知

$$\int_{V(\tau_{k-1}^+, x(\tau_{k-1}^+))}^{V(\tau_k^+, x(\tau_k^+))} \frac{ds}{C_k(s)} \leqslant 0. \tag{3.2.10}$$

故

$$V(\tau_k^+, x(\tau_k^+)) \leqslant V(\tau_{k-1}^+, x(\tau_{k-1}^+)), \qquad k = q+1, \cdots, j,$$

$$V(\tau_j^+, x(\tau_j^+)) \leqslant V(\tau_q^+, x(\tau_q^+)). \tag{3.2.11}$$

可证

$$V(\tau_q^+, x(\tau_q^+)) < \beta_1. \tag{3.2.12}$$

如果 $\tau_q = t_0$, 由 (3.2.8) 知 (3.2.12) 显然成立. 否则 $\tau_{q-1} < t_0 < \tau_q$. 如果 $\mu_q \leqslant 0$, 则由 (3.2.4) 得

$$V(\tau_q, x(\tau_q)) \leqslant V(t_0^+, x(t_0^+)) < m.$$

由 (3.2.6) 及 (3.2.8) 得

$$V(\tau_q^+, x(\tau_q^+)) \leqslant m + |\nu_q| \max_{s\in[0,m]} d_q(s) < \beta_1.$$

另一方面，如果 $\mu_q > 0$, 由 (3.2.4) 知

$$\int_m^{V(\tau_q,x(\tau_q))} \frac{ds}{C_q(s)} \leqslant \int_{V(t_0^+,x_0)}^{V(\tau_q,x(\tau_q))} \frac{ds}{C_q(s)} \leqslant \mu_q \frac{\tau_q - t_0}{\Delta\tau_q} < \mu_q.$$

与 (3.2.6) 及 (3.2.7) 联立得

$$\int_m^{V(\tau_q,x(\tau_q))} \frac{ds}{C_k(s)} \leqslant \mu_q + \int_{V(\tau_q,x(\tau_q))}^{V(\tau_q,x(\tau_q))+\nu_q d_q(V\tau_q,x(\tau_q))} \frac{ds}{C_q(s)} \leqslant -\gamma_q, \tag{3.2.13}$$

所以 (3.2.12) 成立. 进一步，由 (3.2.11) 得，如果 $j \geqslant q$,

$$V(\tau_j^+, x(\tau_j^+)) < \beta_1.$$

令 $\hat{t} = \max\{t_0, \tau_j\}$. 则不论 j 的值如何，我们有

$$V(\hat{t}^+, x(\hat{t}^+)) < \beta_1. \tag{3.2.14}$$

显然， $\tilde{t} \in [\hat{t}, t_{j+1})$. 如果 $\tilde{t} = \hat{t}$ 或者 $\tilde{t} > \hat{t}$ 且 $\mu_{j+1} \leqslant 0$ 则由 (3.2.4) 及 (3.2.14) 可得

$$V(\tilde{t}^+, x(\tilde{t}^+)) \leqslant V(\hat{t}^+, x(\hat{t}^+)) < \beta_1,$$

得矛盾

$$a(\beta - 1) \leqslant a(h(\tilde{t}^+, x(\tilde{t}^+))) \leqslant V(\tilde{t}^+, x(\tilde{t}^+)) < \beta_1 < a(\beta - 1).$$

另一方面，如果 $\tilde{t} > \hat{t}, \mu_{j+1} > 0$, 则由 (3.2.2), (3.2.4) 及 (3.2.5) 得矛盾

$$\mu_{j+1} \geqslant \int_{V(\hat{t}^+,x(\hat{t}^+))}^{V(\tilde{t},x(\tilde{t}))} \frac{ds}{C_{j+1}(s)} > \int_{\beta_1}^{a(\beta-1)} \frac{ds}{C_{j+1}(s)} \geqslant \mu_{j+1}.$$

于是，必有 $h(t, x(t)) < \beta, t \geqslant t_0$. 从而系统 (3.2.1) 是 (h_0, h) 有界的.

定理 3.2.2　假定

(i) $h_0, h \in \Gamma, h(t,x) \leqslant \varphi(h_0(t,x)), \varphi \in C[R_+, R_+]$;　　(3.2.15)

(ii) $V \in \nu_0$, 存在函数 $\alpha \in KR, b \in C[R_+, R_+]$ 及一个正常数 ρ, 满足

$$\alpha(h(t,x)) \leqslant V(t,x) \leqslant b(h_0(t,x)), \qquad (t,x) \in s^c(h_0,\rho); \tag{3.2.16}$$

(iii) 存在函数 $C_k \in K_0$ 及常数 $\mu_k, k = 1, 2, \cdots$, 满足

$$D^+V(t,x) \leqslant \frac{\mu_k}{\Delta\tau_k} C_k(V(t,x)), (t,x) \in (\tau_{k-1}, \tau_k) \times R^n \cap s^c(h_0,\rho), \tag{3.2.17}$$

$$s \geqslant \mu_k C_k(s), \qquad s \geqslant 0, \tag{3.2.18}$$

其中 $\Delta\tau_k = \tau_k - \tau_{k-1}$;

(iv) 存在常数 ν_k 及函数 $d_k \in K_0, k = 1, 2, \cdots$, 满足

$$|\nu_k| < M, \tag{3.2.19}$$

$$\Delta V(\tau_k, x) \leqslant \nu_k d_k(V(\tau_k, x)), \qquad (\tau_k, x) \in s^c(h_0, \rho), \tag{3.2.20}$$

其中 M 为一正常数;

(v) $\forall \alpha > 0, \eta = \eta(\alpha) > 0$, 满足

$$d_k(s) < \eta, \qquad s \in [0, \alpha]; \tag{3.2.21}$$

(vi) 存在常数 $\gamma_k \geqslant 0, k = 1, 2, \cdots$, 满足

$$\mu_k + \int_\sigma^{\sigma+\nu_k d_k(\sigma)} \frac{ds}{C_k(s)} \leqslant -\gamma_k, \qquad \sigma \geqslant 0; \tag{3.2.22}$$

(vii) $\forall \alpha > 0$, 存在常数 $\gamma = \gamma(\alpha) > 0$, 满足 $h_0(\tau_k, x) \leqslant \alpha$ 时,

$$h_0(\tau_k^+, x + I(\tau_k, x)) < \alpha + \gamma(\alpha), \tag{3.2.23}$$

则系统 (3.2.1) 是 (h_0, h) 一致有界的.

证明 $\forall t_0 \in R_+, \alpha > \rho > 0$, 我们选取 $\beta_1 = \beta_1(\alpha)$, 满足

$$\beta_1 > \max\{m + M\eta(m), \max_{s\in[0,\alpha+\gamma(\alpha)]} \varphi(s) + 1\},$$

其中 $m = \max\limits_{s\in[0,\alpha+\gamma(\alpha)]} b(s)$. 选取 $\beta = \beta(\alpha)$, 满足 $\beta > \max\{\beta_1, \alpha^{-1}(e\beta_1) + 1\}$. 由 (3.2.15) 可知, 如果 $h_0(t_0^+, x_0) < \alpha$, 则

$$h(t_0^+, x_0) \leqslant \varphi(h_0(t_0^+, x_0)) < \beta.$$

可证对于系统 (3.2.1) 的满足 $h_0(t_0^+, x_0) < \alpha$ 的任意解 $x(t) = x(t, t_0^+, x_0)$ 有

$$h(t, x(t)) < \beta, \qquad t \geqslant t_0.$$

若不然, 必存在系统 (3.2.1) 的一个解 $x(t) = x(t, t_0^+, x_0), h_0(t_0^+, x_0) < \alpha$ 及时刻 $t_0 < t_1 < t_2$, 满足

$$\alpha \leqslant h_0(t, x(t)), \qquad t \in [t_1, t_2]\text{且}t \neq \tau_k,$$

$$h_0(t_1, x(t_1)) < \alpha + \gamma(\alpha),$$

$$h_0(t_2^+, x(t_2^+)) > \alpha + \gamma(\alpha) \text{ 及 } h(t_2^+, x(t_2^+)) \geqslant \beta - 1.$$

令 $q = \min\{k : \tau_k \geqslant t_1\}, j = \max\{k : \tau_k \leqslant t_2\}$. 用与定理 3.2.1 证明中类似的理由可推得矛盾. 所以系统 (3.2.1) 是 (h_0, h) 一致有界的. □

定理 3.2.3　假定定理 3.2.2 的所有条件成立，且满足

(i) $\varphi \in KR, C_k \in K$, 其中 φ 和 C_k 分别指 (3.2.15) 和 (3.2.17) 中的函数;

(ii) 存在正数 A, $\bar{\rho}$ 及函数 $\Psi \in C[R_+, R_+]$, 满足

$$\Delta\tau_k < A, a(h(t,x)) \leqslant V(t,x) \leqslant \Psi(h(t,x)), \qquad (t,x) \in s^c(h, \bar{\rho}); \tag{3.2.24}$$

(iii) $\forall \beta > \bar{\rho}, c > 0$, 存在正整数 N, 满足

$$\sum_{k=q+1}^{q+N} \gamma_k C_k(\beta) > c, \qquad q \geqslant 0; \tag{3.2.25}$$

(iv) $\forall \alpha > 0$, 存在常数 $\eta = \eta(\alpha) > 0$, 满足

$$h(\tau_k, x) \leqslant \alpha \text{时}, \qquad h(\tau_k^+, x + I(\tau_k, x)) < \alpha + \eta(\alpha),$$

则系统 (3.2.1)(h_0, h) 一致最终有界.

证明　由定理 3.2.2 得，系统 (3.2.1) 是 (h_0, h) 一致有界的，我们只需证系统 (3.2.1) 的 (h_0, h) 拟一致最终有界性. 考虑到 (i), (iv) 及条件 (3.2.24), 可知系统 (3.2.1) 是 (h_0, h) 一致有界的. 所以任给 $\bar{\alpha} > \bar{\rho}$, 且 $a(\bar{\alpha}) > \bar{\rho}$, 必存在 $\bar{\beta} = \bar{\beta}(\bar{\alpha}) > 0$, 满足

$$h(t_0^+, x_0) < \bar{\alpha} \text{时}, \qquad h(t, x(t)) < \bar{\beta},$$

其中 $x(t) = x(t, t_0^+, x_0)$ 是系统 (3.2.1) 的任意解. 任给 $t_0 \in R_+, \alpha > 0$, 由 (3.2.25), 存在正整数 N, 满足

$$\sum_{k=q+1}^{q+N} \gamma_k C_k(a(\bar{\alpha})) > \beta_1 > \max\{m + M\eta(m), \rho\}, \qquad q \geqslant 0, \tag{3.2.26}$$

其中 β_1 是一正常数， $m = \max\limits_{s \in [0,\alpha]} b(s)$. 令 $T = NA$, 我们将证明存在 $\tilde{t} \in [t_0, t_0 + T)$, 满足 $h_0(t_0^+, x_0) < \alpha$ 时,

$$h(\tilde{t}^+, x(\tilde{t}^+)) < \bar{\alpha}.$$

如果结论不成立，存在系统 (3.2.1) 的解 $x(t) = x(t, t_0^+, x_0), h_0(t_0^+, x_0) < \alpha$, 满足

$$h(t^+, x(t^+)) \geqslant \bar{\alpha}, \qquad t \in [t_0, t_0 + T).$$

由条件 (i), 可得

$$h_0(t^+, x(t^+)) \geqslant \varphi^{-1}(\bar{\alpha}), \qquad t \in [t_0, t_0 + T).$$

选取 $\bar{\alpha}$ 充分大，使得 $h_0(t^+, x(t^+)) > \varphi^{-1}(\bar{\alpha}) > \rho$, 则由条件 (3.2.17),(3.2.20) 及 (3.2.22) 得

$$\int_{V(\tau_{k-1}^+, x(\tau_{k-1}^+))}^{V(\tau_k^+, x(\tau_k^+))} \frac{ds}{C_k(s)} \leqslant -\gamma_k, \qquad \tau_{k-1}, \tau_k \in [t_0, t_0+T).$$

故

$$V(\tau_{k-1}^+, x(\tau_{k-1}^+)) \leqslant V(\tau_k^+, x(\tau_k^+)) - \gamma_k C_k(a(\bar{\alpha})). \tag{3.2.27}$$

类似于定理 3.2.1 的证明可得

$$V(\tau_q^+, x(\tau_q^+)) \leqslant \beta_1,$$

其中 $q = \min\{k : \tau_k \geqslant t_0\}$. 上式连同 (3.2.26) 及 (3.2.27) 导致矛盾

$$V(\tau_{q+N}^+, x(\tau_{q+N}^+)) \leqslant V(\tau_q^+, x(\tau_q^+)) - \sum_{k=q+1}^{q+N} \gamma_k C_k(a(\bar{\alpha})) < 0.$$

所以必存在 $\tilde{t} \in [t_0, t_0+T)$, 满足 $h(\tilde{t}^+, x(\tilde{t}^+)) < \bar{\alpha}$. 由 (h_0, h) 一致有界性知

$$h(t, x(t)) < \bar{\beta}(\bar{\alpha}), \qquad t \geqslant t_0 + T.$$

□

注 3.2.1 如果条件 (3.2.25) 减弱为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k C_k(\sigma) = \infty, \qquad \forall \sigma > 0,$$

则我们仅能得到系统 (3.2.1) 的 (h_0, h) 等度最终有界性.

定理 3.2.4 假定

(i) $h_0, h \in \Gamma, V \in \nu_0$, 存在函数 $\alpha \in KR, b, \varphi \in C[R_+, R_+], \rho > 0$, 满足

$$h(t, x) \leqslant \varphi(h_0(t, x)), \tag{3.2.28}$$

$$\alpha(h(t, x)) \leqslant V(t, x), \qquad (t, x) \in s^c(h, \rho) \bigcap s^c(h_0, \rho), \tag{3.2.29}$$

$$V(t, x) \leqslant b(h_0(t, x)), \qquad (t, x) \in s^c(h_0, \rho); \tag{3.2.30}$$

(ii) 存在函数 $\Psi_k \in K_0, C_k \in K, k = 0, 1, \cdots$ 及 $p \in PC[R_+, R_+]$, 满足

$$V(\tau_k^+, x + I(\tau_k, x)) \leqslant \Psi_k(V(\tau_k, x)), \qquad (\tau_k, x) \in s^c(h_0, \rho), \tag{3.2.31}$$

$$D^+V(t, x) \leqslant p(t) C_{k-1}(V(t, x)), \qquad t \in (\tau_{k-1,k}\tau_k), (t, x) \in s^c(h_0, \rho); \tag{3.2.32}$$

(iii) 存在常数 $A, \gamma_k \geqslant 0, k = 0, 1, \cdots$, 满足

$$\int_{\tau_k}^{\tau_k+1} p(s)ds + \int_{\sigma}^{\Psi_k(\sigma)} \frac{ds}{C_k(s)} \geqslant -\gamma_k, \qquad \sigma \leqslant 0, \tag{3.2.33}$$

$$\Delta\tau_k = \tau_k - \tau_{k-1} < A, \tag{3.2.34}$$

及任给 $M > 0$, 存在正整数 N, 满足

$$\sum_{k=q+1}^{q+N} \gamma_k C_k(s) > M, \qquad q \in \mathbf{Z}^+, s > \rho; \tag{3.2.35}$$

(iv) $\forall \alpha > 0$, 存在常数 $\eta = \eta(\alpha) > 0$, 满足

$$\Psi_k(\eta) > \alpha, \qquad k = 0, 1, \cdots; \tag{3.2.36}$$

(v) $\forall \alpha > 0$, 存在常数 $\gamma = \gamma(\alpha) > 0$, 满足

$$h_0(\tau_k, x) \leqslant \alpha \text{时}, \qquad h_0(\tau_k^+, x + I(\tau_k, x)) < \alpha + \gamma(\alpha), \tag{3.2.37}$$

则系统 (3.2.1) 是 (h_0, h) 一致最终有界的.

证明　首先，我们证明系统 (3.2.1) 的 (h_0, h) 一致有界性. $\forall \alpha > \rho > 0$, 由 (3.2.36), 我们选取 $\beta = \beta(\alpha)$, 满足

$$\beta > \max\{a^{-1}(\eta) + 1, \rho, \max_{s \in [0, \alpha]} \varphi(s)\}, \tag{3.2.38}$$

其中 $m = \max\limits_{s \in [0, \alpha + \gamma(\alpha)]} \{b(s), \Psi_k(\eta)\} > m$, $k = 0, 1, \cdots$. 于是，根据 (3.2.28) 我们知 $h_0(t_0^+, x_0) < \alpha$ 时,

$$h(t_0^+, x_0) < \beta.$$

对于系统 (3.2.1) 的任意满足 $h_0(t_0^+, x_0) < \alpha$ 的解 $x(t) = x(t, t_0^+, x_0)$, 我们有

$$h(t, x(t)) < \beta, \qquad t \geqslant t_0.$$

若不然，必存在系统 (3.2.1) 的一个解 $x(t) = x(t, t_0^+, x_0), h_0(t_0^+, x_0) < \alpha$ 及 $\tilde{t} > t_1 > t_0$, 满足

$$\alpha \leqslant h_0(t, x(t)), \qquad t \in [t_1, \tilde{t}\,],$$

$$h_0(t_1^+, x_1^+) < \alpha + \gamma(\alpha), \qquad h(\tilde{t}, x(\tilde{t})) \geqslant \beta. \tag{3.2.39}$$

令 $m(t) = V(t, x(t)), q = \min\{k : \tau_k \geqslant t_1\}$, 根据 (3.2.32) 可知

$$\int_{m(t_1^+)}^{m(t)} \frac{ds}{C_{q-1}(s)} \leqslant \int_{t_1}^{t} p(s)ds, \qquad t \in [t_1, \tau_q]. \tag{3.2.40}$$

由 (3.2.30) 得

$$\int_{m(t_1^+)}^{m(t)} \frac{ds}{C_{q-1}(s)} \geqslant \int_{\Psi_{q-1}(\eta)}^{m(t)} \frac{ds}{C_{q-1}(s)}.$$

上式与 (3.2.40) 联立得

$$\int_{t_1}^{t} p(s)ds + \int_{m(t)}^{\Psi_{q-1}(\eta)} \frac{ds}{C_{q-1}(s)} \geqslant 0,$$

结合 (3.2.33), 我们可得

$$m(t) < \eta, \qquad t \in (\check{t}_1, \tau_q]. \tag{3.2.41}$$

由 (3.2.32) 我们得到

$$\int_{m(\tau_i^+)}^{m(t)} \frac{ds}{C_i(s)} \leqslant \int_{\tau_i}^{t} p(s)ds \leqslant \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} p(s)ds, \qquad t \in (\tau_i, \tau_{i+1}], \tau_i, \tau_{i+1} \in [t_1, \widetilde{t}\,]. \tag{3.2.42}$$

于是，由 (3.2.31),(3.2.33) 及 (3.2.42) 知

$$\int_{m(\tau_i)}^{m(t)} \frac{ds}{C_i(s)} \leqslant \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} p(s)ds + \int_{m(\tau_i)}^{\Psi_i(m(\tau_i))} \frac{ds}{C_i(s)} \leqslant -\gamma_i, \qquad t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]. \tag{3.2.43}$$

结合 (3.2.41) 可得

$$m(t) \leqslant m(\tau_i) < \eta, \qquad t \in (\tau_i, \tau_{i+1}], \tau_i, \tau_{i+1} \in [t_1, \widetilde{t}\,]. \tag{3.2.44}$$

于是由 (3.2.38),(3.2.39) 及 (3.2.44) 得矛盾

$$a(\beta) \leqslant a(h(\widetilde{t}, x(\widetilde{t})) \leqslant m(t) < \eta < a(\beta).$$

接下来, 我们证明系统 (3.2.1) 的 (h_0, h) 拟一致最终有界性. 由前面结论可知, 对于 $\alpha = \rho$, 存在常数 $\beta = \beta(\rho) > \rho$, 满足

$$a(\beta) > \rho, h(t, x(t)) < \beta, \qquad t \geqslant t_0,$$

其中 $x(t) = x(t, t_0^+, x_0)$ 是系统 (3.2.1) 的满足 $h_0(t_0^+, x_0) < \rho$ 任意解. 任给 $\alpha > \rho$, 对于系统 (3.2.1) 的任意满足 $h_0(t_0^+, x_0) < \alpha$ 的解 $x(t)$, 我们定义 $m(t) = V(t, x(t))$. 根据 (3.2.35), 存在 $N > 0$, 满足

$$\sum_{k=m+1}^{N+m} C_k(a(\beta))\gamma_k > \eta, \qquad m \in \mathbf{Z}^+, \tag{3.2.45}$$

其中 $\eta = \eta(\alpha)$ 如 (3.2.38) 中所定义. 令 $T = T(\alpha) = (N+1)A$, 则我们有两种情形需要考虑:

情形 1. 存在 $t^* \in (t_0, t_0 + T]$ 满足

$$h_0(t^*, x(t^*)) < \rho.$$

由 (h_0, h) 一致有界性, 我们知

$$h(t, x(t)) < \beta, \qquad t \geqslant t_0 + T > t^*.$$

情形 2. $h_0(t, x(t)) \geqslant \rho, t \in (t_0, t_0 + T]$. 可证, 存在 $\tau_k \in (t_0, t_0 + T]$, 满足

$$m(\tau_k) < a(\beta). \tag{3.2.46}$$

否则, 假定 $m(\tau_k) \geqslant a(\beta), \tau_k \in (t_0, t_0 + T)$. 由 (3.2.41),(3.2.43) 和 (3.2.45) 可得

$$m(\tau_{N+q}) \leqslant m(\tau_q) - \sum_{k=q}^{q+N} C_k(a(\beta))\gamma_k < 0,$$

其中 $q = \min\{k : \tau_q \geqslant t_0\}$, 这与 $m(\tau_{N+q}) \geqslant 0$ 矛盾, 所以 (3.2.46) 成立. 由 (3.2.44) 知

$$m(t) < a(\beta), \qquad t \in [\tau_k, t_0 + T]. \tag{3.2.47}$$

当 $t \in (t_0 + T, t_0 + 2T]$ 时, 如果 $h_0(t, x(t)) \geqslant \rho$, 由 (3.2.44) 和 (3.2.47) 可得

$$m(t) < a(\beta),$$

结合 (3.2.29) 可知

$$h(t, x(t)) < \beta, \qquad t \in [t_0 + T, t_0 + 2T].$$

否则, 如果存在 $\tilde{t} \in [t_0 + T, t_0 + 2T)$, 满足

$$h_0(t, x(t)) \geqslant \rho, t \in (t_0 + T, \tilde{t}\,], \qquad h_0(s, x(s)) < \rho, s \in (\tilde{t}, \tilde{t} + \delta),$$

其中 δ 是一个充分小的正数, 满足 $\tilde{t} + \delta \leqslant t_0 + 2T$. 则由前面的同样思路可得

$$m(t) \leqslant a(\beta), \qquad t \in [t_0 + T, \tilde{t}],$$

及

$$h(t, x(t)) < \beta, \qquad t > \tilde{t}.$$

结合 (3.2.29) 得

$$h(t, x(t)) < \beta, \qquad t \in [t_0 + T, t_0 + 2T].$$

于是由递推法得

$$h(t,x(t))<\beta,\qquad t\geqslant t_0+T.$$

□

作为应用，我们给出下面一个例子.

例 3.2.1 考虑脉冲微分系统

$$\begin{cases} x_1'=\dfrac{1}{4}x_1-x_2, & t\neq\dfrac{k\pi}{2},\\ x_2'=x_1+\dfrac{1}{4}x_2, & t\neq\dfrac{k\pi}{2},\\ \Delta x_1=-\dfrac{1}{2}x_1, & t=\dfrac{k\pi}{2},\\ \Delta x_2=-\dfrac{1}{2}x_2, & t=\dfrac{k\pi}{2}. \end{cases}\tag{3.2.48}$$

令 $V(t,x)=\dfrac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$. 则

$$V'(t,x)=x_1\left(\frac{1}{4}x_1-x_2\right)+x_2\left(x_1+\frac{1}{4}x_2\right)=\frac{1}{2}V(t,x),\qquad t\neq\frac{k\pi}{2}.$$

$$\Delta V(t,x)=\frac{1}{2}\left[\left(x_1-\frac{1}{2}x_1\right)^2+\left(x_2-\frac{1}{2}x_2\right)^2-(x_1^2+x_2^2)\right]=-\frac{3}{4}V(t,x),\qquad t=\frac{k\pi}{2}.$$

选取 $\mu_k=\dfrac{\pi}{4},\nu_k=-\dfrac{3}{4},C_k(s)=d_k(s)=s,h(t,x)=h_0(t,x)=|x|$, 有

$$\mu_k+\int_\sigma^{\sigma+\nu_k d_k(\sigma)}\frac{ds}{C_k(s)}=\frac{\pi}{4}-\ln 4<0\ .$$

定理 3.2.3 的所有条件都成立，故系统 (3.2.48) 是一致最终有界的. 然而，易证它所包含的连续系统是无界的. 这说明脉冲可以引起系统有界性的变化.

Lagrange 稳定性与有界性密切相关，下面给出一个 Lagrange 稳定性的结果.

定义 3.2.4 令 $x(t)=x(t,t_0^+,x_0)$ 是系统 (3.2.1) 的解，系统 (3.2.1) 称为

(1) (h_0,h) 大范围等度吸引，如果 $\forall\alpha,\varepsilon>0.t_0\in R_+$, 存在 $T=T(t_0,\alpha,\varepsilon)>0$, 满足 $h_0<\alpha$ 时,

$$h(t,x(t))<\varepsilon,\qquad t\geqslant t_0+T;$$

(2) (h_0,h) 等度 Lagrange 稳定，如果 (h_0,h) 有界性和 (1) 同时成立.

定理 3.2.5 假定定理 3.2.1 的条件除 (i) 外全部成立，且满足

(i) $a(h(t,x))\leqslant V(t,x)\leqslant b(t,h_0(t,x))$, 其中 $a\in K,b\in PCC$; (3.2.49)

(ii) $C_k\in K$, 对于常数 γ_k 和函数 $C_k,k=1,2,\cdots$, 下面关系成立:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k C_k(\delta)=\infty,\qquad \delta\in(0,\rho),\rho>0;\tag{3.2.50}$$

(iii) $s \geqslant \mu_k C_k(s),\ s \geqslant 0,$ (3.2.51)

则系统 (3.2.1) 是 (h_0, h) 大范围等度吸引的.

证明　首先证明对于 $\forall\varepsilon \in (0, a^{-}1(e\rho)), \alpha > 0, t_0 \in R_+$, 存在 $T = T(t_0, \alpha, \varepsilon) > 0$ 及 $\tau_k \in [t_0, t_0 + T)$ 满足

$$V(\tau_k^+, x(\tau_k^+)) < \frac{a(\varepsilon)}{e}, \tag{3.2.52}$$

其中 $x(t) = x(t, t_0^+, x_0)$ 是系统 (3.2.1) 的满足 $h_0(t_0^+, x_0) < \alpha$, 的任意解.

若不然, 存在系统 (3.2.1) 的解 $x(t)$, 满足 $h_0(t_0^+, x_0) < \alpha$, 对于 $\forall T > 0$ 有

$$V(\tau_k^+, x(\tau_k^+)) \geqslant \frac{a(\varepsilon)}{e}, \qquad \tau_k \in [t_0, t_0 + T). \tag{3.2.53}$$

同定理 (3.2.1) 的证明, 我们可得

$$\int_{V(\tau_{k-1}^+, x(\tau_{k-1}^+))}^{V(\tau_k^+, x(\tau_k^+))} \frac{ds}{C_k(s)} \leqslant -\gamma_k, \qquad \tau_{k-1} \geqslant t_0. \tag{3.2.54}$$

由 (3.2.53) 及上式可推

$$V(\tau_k^+, x(\tau_k^+)) \leqslant V(\tau_{k-1}^+, x(\tau_{k-1}^+)) - C_k\left(\frac{a(\varepsilon)}{e}\right)\gamma_k, \qquad \tau_{k-1}, \tau_k \in [t_0, t_0 + T).$$

令 $q = \min\{k : \tau_k \geqslant t_0\},\ q + N = \max\{k : \tau_k < t_0 T\}$, 则有

$$\begin{aligned} V(\tau_{q+N}^+, x(\tau_{q+N}^+)) &\leqslant V(\tau_q^+, x(\tau_q^+)) - \sum_{k=q+1}^{q+N} \gamma_k C_k\left(\frac{a(\varepsilon)}{e}\right) \\ &\leqslant \beta_1 - \sum_{k=q+1}^{q+N} \gamma_k C_k\left(\frac{a(\varepsilon)}{e}\right), \end{aligned} \tag{3.2.55}$$

其中 β_1 如定理 3.2.1 中所定义. 由 (3.2.50), 我们可以选取 T 足够大, 满足

$$\sum_{k=q+1}^{q+N} \gamma_k C_k\left(\frac{a(\varepsilon)}{e}\right) > \beta_1. \tag{3.2.56}$$

则由 (3.2.55) 得矛盾

$$V(\tau_{q+N}^+, x(\tau_{q+N}^+)) < 0.$$

所以 (3.2.52) 成立.

下面, 我们证明对于 $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k],\ k = 2, 3, \cdots,$

$$V(t, x(t)) \leqslant eV(\tau_{k-1}^+, x(\tau_{k-1}^+)). \tag{3.2.57}$$

如果 $\mu_k \leqslant 0$, 则 (3.2.57) 显然成立. 否则, 若 $\mu_k > 0$, 由 (3.2.52) 得

$$\int_{V(\tau_{k-1}^+, x(\tau_{k-1}^+))}^{V(t,x(t))} \frac{ds}{C_k(s)} \leqslant \frac{t-\tau_{k-1}}{\Delta\tau_k}\mu_k \leqslant \mu_k, \qquad t \in (\tau_{k-1}, \tau_k], \tag{3.2.58}$$

由条件 (3.2.51), 我们有

$$\begin{aligned} \int_{V(\tau_{k-1}^+, x(\tau_{k-1}^+))}^{V(t,x(t))} \frac{ds}{C_k(s)} &\geqslant \mu_k \int_{V(\tau_{k-1}^+, x(\tau_{k-1}^+))}^{V(t,x(t))} \frac{ds}{s} \\ &= \mu_k \ln \frac{V(t,x(t))}{V(\tau_{k-1}^+, x(\tau_{k-1}^+))}, \qquad t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]. \end{aligned} \tag{3.2.59}$$

由 (3.2.58),(3.2.59) 联立可得

$$1 \geqslant \ln \frac{V(t,x(t))}{V(\tau_{k-1}^+, x(\tau_{k-1}^+))},$$

故可得

$$V(t,x(t)) \leqslant eV(\tau_{k-1}^+, x(\tau_{k-1}^+)).$$

假定 $T = T(t_0, \alpha, \varepsilon)$ 如 (3.2.56) 中所定义, $\tau_k \in [t_0, t_0 + T)$ 满足

$$V(\tau_k^+, x(\tau_k^+)) < \frac{a(\varepsilon)}{e}.$$

由 (3.2.54) 及 (3.2.57) 可得

$$V(t,x(t)) < a(\varepsilon), \qquad t > \tau_k.$$

结合 (3.2.49), 我们知

$$h(t,x(t)) < \varepsilon, \qquad t \geqslant t_0 + T.$$

□

注 3.2.2 在定理 3.2.5 中, 如果 $\alpha \in KR$, 通过定理 3.2.1, 我们可得系统 (3.2.1) 的 (h_0, h) 有界性, 结合 (h_0, h) 大范围的等度吸引性可知, 系统 (3.2.1) 是 (h_0, h) 等度 Lagrange 稳定的.

§3.3 具依赖状态的脉冲微分系统的比较原理

本节给出任意时刻脉冲微分系统的一般比较原理. 我们讨论如下任意时刻纯量脉冲微分系统:

$$(\text{I}) \quad \begin{cases} x' = f(t,x), & t \neq \tau_k(x), (t,x) \in I \times J, & (3.3.1) \\ \Delta_k x(t) = I_k(x(t)), & t = \tau_k(x), k = 1, 2, \cdots, & (3.3.2) \\ x(t_0) = x_0, & \end{cases}$$

其中 $I=(t_0,T]$ $(t_0<T\leqslant+\infty)$, J 是 R 上的一个开区间; $f\in C[I\times J,R]$, $\tau_k\in C^1[J,I], I_k\in C^1[J,R](k\geqslant 1)$, $t_0<\tau_1(x)<\cdots<T$, 且对于 $x\in J$, $x+I_k(x)\in J$; $\Delta_k x(t)=x(t_k+0)-x(t_k-0)=x_k^+-x_k$; $t_k=\tau_k(x(t_k))$.
有关 (I) 的解的一般性质，请参阅 [1].

我们假设 (I) 没有脉动现象. 现给出以下条件和引理 (参阅 [1]):

(H_1) (i)$\tau_k'(x)f(t,x)<1$, $(t,x)\in I\times J,\forall k\geqslant 1$.

(ii) $\tau_k'(x+sI_k(x))\cdot I_k(x)\leqslant 0$, $x\in J, 0\leqslant s\leqslant 1,\forall k\geqslant 1$.

(H_2) $f(t,x)-f(t,y)\leqslant L(x-y)$, $t\in I, x\geqslant y, x,y\in J, L>0$.

引理 3.3.1 假设 (H_1) 成立, 那么 (I) 的任意解 $x(t)$ 与每个曲面 $t=\tau_k(x)(k\geqslant 1)$ 至多碰一次.

定义 3.3.1 设 $w(t)$ 与曲面 $S_k:t=\tau_k(x)(k\geqslant 1)$ 至多碰一次且

$$\omega'(t)\geqslant f(t,\omega(t)),\qquad t\neq\tau_k(\omega(t)), \tag{3.3.3}$$

$$\Delta_k\omega(t)\geqslant I_k(\omega(t)),\qquad t=\tau_k(\omega(t)), k=1,2,\cdots, \tag{3.3.4}$$

$$\omega(t_0)\geqslant x_0. \tag{3.3.5}$$

则称 $\omega\in PC^1[I,J]$ 为 (I) 的一个上解.

类似地, (I) 的下解 $v(t)$ 可通过变换 (3.3.3) ~ (3.3.5) 中的不等号来定义.

注 3.3.1 (I) 的任意解 $x(t,x_0)$ 同时是 (I) 的上解和下解.

我们写出与 (I) 相对应的常微分方程的一些熟知的结果.

引理 3.3.2 设 $v,\omega\in C^1[I,J]$ 分别为

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} x'=f(t,x), & (t,x)\in I\times J,\\ x(t_0)=x_0\in J \end{cases}$$

的下解和上解, 假设 (H_2) 成立. 若 $v(t_0)\leqslant\omega(t_0)$, 则在 I 上 $v(t)\leqslant\omega(t)$.

引理 3.3.3 假设 (H_1) 成立, 则

(i) $\tau_k(\omega_1)<\tau_k(y_0)$ 且 $\omega_1>y_0$, 得 $\omega_1+I_k(\omega_1)>y_0$; (3.3.6)

(ii) $\tau_k(v_1)<\tau_k(y_0)$ 且 $v_1<y_0$, 得 $v_1+I_k(v_1)<y_0$. (3.3.7)

证明 假设 (i) 结论不成立, 即 $\omega_1+I_k(\omega_1)\leqslant y_0$, 则有 $\omega_1>y_0\geqslant\omega_1+I_k(\omega_1)$, 所以 $I_k(\omega_1)<0$. 由 (H_1) 中的 (ii) 得 $\tau_k'(\omega_1+sI_k(w_1))\geqslant 0, 0\leqslant s\leqslant 1$, 即

$$\tau_k'(x)\geqslant 0,\qquad x\in[\omega_1+I(\omega_1),\omega_1]. \tag{3.3.8}$$

而由 (3.3.6)$\tau_k(y_0)>\tau_k(w_1), y_0<\omega_1$ 这与 (3.3.8) 矛盾.

类似以上证明, 可知 (3.3.7) 也成立. □

引理 3.3.4 设 $x\in C[t_1,t_2]$, $t\neq\tau_i(x), t\in[t_1,t_2]$, $\forall i\geqslant 1$; $\tau_k(y_1)\leqslant t_1<\tau_k(x(t_1)), t_2=\tau_k(x(t_2)), k$ 为某个自然数.

(i) 如果 $y_1 > x(t_1)$, 那么 $y_1 > x(t_2)$;

(ii) 如果 $y_1 < x(t_1)$, 那么 $y_1 < x(t_2)$.

证明 我们只给出 (i) 的证明. 假设结论相反，$y_1 \leqslant x(t_2)$. 从 $\tau_k(y_1) < \tau_k(x(t_2))$, 一定有 $y_1 < x(t_2)$. 令

$$\rho(t) = y_1 - x(t), \qquad t \in [t_1, t_2], \tag{3.3.9}$$

因 $x \in C[t_1, t_2]$, 则 $\rho(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 上连续. 注意

$$\rho(t_1) = y_1 - x(t_1) > 0, \qquad \rho(t_2) = y_1 - x(t_2) < 0, \tag{3.3.10}$$

因此存在 $t^* \in (t_1, t_2)$, 有 $\rho(t^*) = 0$, 即 $x(t^*) = y_1$. 由于

$$t_1 < \tau_k(x(t_1), \qquad \tau_k(x(t^*)) = \tau_k(y_1) \leqslant t_1 < t^*,$$

所以存在 $s_0 \in (t_1, t^*)$, 有 $s_0 = \tau_k(x(s_0))$. 这显然矛盾. □

为了方便，总假定 $\omega(t), \nu(t)$ 分别是 (I) 的上解和下解，且与每个曲面至多碰一次.

定理 3.3.1 假设 $(\mathrm{H}_1) \sim (\mathrm{H}_2)$ 成立. 进一步假设

(H_3) $h_i(x)$ 单调递增且当 $x < y, \tau_i(x) = \tau_j(y)$ 时 $h_i(x) < h_j(y)$, 这里 $h_i(x) = x + I_i(x)$;

(H_4) $\tau_i'(x)f(t, h_i(x)) < h_i'(x)$, $(t, x) \in I \times J, \forall i \geqslant 1$,

那么当 $\omega(t_0) \geqslant \nu(t_0)$ 时，有 $\omega(t) \geqslant \nu(t), t \in I$.

证明 由 $\omega(t), \nu(t)$ 的定义，有

$$t_k = \tau_{i_1}(\omega(t_k)), \quad s_k = \tau_{j_k}(\nu(s_k)), \qquad k = 1, 2, \cdots, \tag{3.3.11}$$

$$t < \tau_{i_k}(\omega(t)), t \in [t_0, t_k); \qquad t < \tau_{j_k}(\nu(t)), t \in [t_0, s_k). \tag{3.3.12}$$

因为 $\omega(t), \nu(t)$ 与 s_1 一定相碰，所以 $i_1 = j_1 = 1$.

为证在 I 上 $\omega(t) \geqslant \nu(t)$, 只需证

$$\omega(t) \geqslant \nu(t), \qquad t \in [t_0, t_k], k = 1, 2, \cdots; \tag{3.3.13t}$$

$$\omega(t) \geqslant \nu(t), \qquad t \in [t_0, s_k], k = 1, 2, \cdots. \tag{3.3.13s}$$

我们仅给出 (3.3.13t) 的证明. (3.3.13s) 的证明类似. 首先证明 $k = 1$ 时 (3.3.13t) 成立. 如果 $t_1 < s_1$, 由引理 3.3.2, 易得 $k = 1$ 时 (3.3.13t) 成立，那么，只需考虑 $t_1 \geqslant s_1$ 的情况.

取 $k_1 \geqslant 1$ 满足

$$s_1 < s_2 < \cdots < s_{k_1} \leqslant t_1 < s_{k_1+1},$$

同样理由得 $\omega(t) \geqslant \nu(t), t \in [t_0, s_1]$. 由 (3.3.12) 有

$$\tau_1(\omega(s_1)) > s_1 = \tau_1(\nu(s_1)), \qquad \omega(s_1) \geqslant \nu(s_1).$$

据引理 3.3.3 得

$$\omega(s_1) > h_1(\nu(s_1)) \geqslant \nu(s_1 + 0).$$

由引理 3.3.2 得

$$\omega(t) \geqslant \nu(t), \qquad t \in [t_0, s_2].$$

因为

$$\omega(s_2) \geqslant \nu(s_2), \qquad \tau_{j_2}(\omega(s_2)) > \tau_1(\omega(s_2)) > s_2 = \tau_{j_2}(\nu(s_2))$$

和引理 3.3.3 得

$$\omega(s_2) > h_{j_2}(\nu(s_2)) \geqslant \nu(s_2 + 0).$$

再由引理 3.3.1 得

$$\omega(t) \geqslant \nu(t), \qquad t \in [t_0, s_3].$$

类似上面证明，由归纳法易证 $k = 1$ 时 (3.3.13t) 成立.

第二步证明 $k = 2$ 时 (3.3.13t) 成立. 取 $k_2 > k_1$ 满足

$$s_{k_1} \leqslant t_1 < s_{k_1+1} < \cdots < s_{k_2} \leqslant t_2 < s_{k_2+1}.$$

如果 $s_{k_1} = t_1$, 则 $\tau_1(\omega(t_1)) = \tau_{j_{k_1}}(\nu(s_{k_1}))$. 由于 $\omega(t_1) \geqslant \nu(s_{k_1})$, 利用 (H_3), 得

$$\omega(t_1 + 0) \geqslant h_1(\omega(t_1)) \geqslant h_{j_{k_1}}(\nu(s_{k_1} + 0)).$$

所以在 $[t_0, s_{k_1+1}]$ 上有 $\omega(t) \geqslant \nu(t)$. 和前面的证明相同，可得 $k = 2$ 时 $(3.3.13t)$ 成立. 如果 $s_{k_1} < t_1 < s_{k_1+1}$, 则只需证明 $\omega(t_1 + 0) \geqslant \nu(t_1)$. 假设结论相反，$\omega(t_1 + 0) < \nu(t_1)$. 令

$$F(x) = \nu[\tau_1(x)] - h_1(x), \tag{3.3.14}$$

$$a = \inf A,$$

$$A = \{y < \omega(t_1) | F(x) > 0, s_{k_1+1} > \tau_1(x) > s_{k_1}, x \in (y, \omega(t_1)]\}, \tag{3.3.15}$$

记 $\omega_1 = \omega(t_1), \omega_1^+ = \omega(t_1 + 0), \nu_{k_1} = \nu(s_{k_1})$. 由于

$$F(\omega_1) = \nu(t_1) - h_1(\omega_1) \geqslant \nu(t_1) - \omega_1^+ > 0, \qquad s_{k_1+1} > t_1 > s_{k_1},$$

由 $\nu[\tau_1(x)]$ 在 $x = \omega_1$ 的连续性得 $A \neq \varnothing$. 根据

$$\tau_1(\nu_{k_1}) \leqslant \tau_{j_{k_1}}(\nu_{k_1}) = s_{k_1} < t_1 = \tau_1(\omega_1), \qquad \nu_{k_1} \leqslant \omega(s_{k_1}).$$

再考虑 (3.3.12) 和引理 3.3.4 得 $\nu_{k_1} < \omega_1$, 注意 $\tau_1(\nu_{k_1}) \leqslant \tau_{j_{k_1}}(\nu_{k_1}) = s_{k_1}$, 则必有 $\nu_{k_1} \notin A$, 所以 $\nu_{k_1} \leqslant a$. 由 (3.3.14)—(3.3.15), 对于 $x \in A = (a, \omega_1]$,

$$F(a) \geqslant 0, \quad s_{k_1+1} \geqslant \tau_1(a) \geqslant s_{k_1}; \qquad \tau_1(x) \in (s_{k_1}, s_{k_1+1}). \tag{3.3.16}$$

现从三种情形得出矛盾.

情形 1. $\tau_1(a) = s_{k_1+1}$.

可以取 $y_1 \in (a, \omega_1]$ 满足 $\tau_1'(y_1) < 0$. 则由 (H_1) 得 $I_1(y_1) \geqslant 0$. 又由

$$0 < F(y_1) = \nu[\tau_1(y_1)] - h_1(y_1) \leqslant \nu[\tau_1(y_1)] - y_1,$$

得到 $\nu[\tau_1(y_1)] > y_1$. 令

$$d(x) = \nu[\tau_1(x)] - x, \qquad x \in [y_1, \omega_1]. \tag{3.3.17}$$

由于 $\tau_{j_{k_1}}(\omega_1) \geqslant \tau_1(\omega_1) = t_1 > \tau_{j_{k_1}}(\nu(t_1))$ 和 $\omega_1 = \omega(t_1) \geqslant \nu(t_1)$, 则有 $\omega_1 > \nu(t_1)$. 因此，由 (3.3.17) 得到

$$d(y_1) = \nu[\tau_1(y_1)] - y_1 > 0; \qquad d(\omega_1) = \nu(t_1) - \omega_1 < 0. \tag{3.3.18}$$

因 $d(x)$ 在 A 上连续，由 (3.3.18) 得到 $\exists x^* \in (y_1, \omega_1)$, 有 $\nu[\tau_1(x^*)] = x^*$, 即

$$t^* = \tau_1(x^*) = \tau_1[\nu(t^*)] \in (s_{k_1}, s_{k_1+1}).$$

这说明 $\nu(t)$ 在 $t = t^* > s_1$ 与 s_1 又一次相碰，显然矛盾.

情形 2. $F(a) > 0, \tau_1(a) = s_{k_1}$.

由 $\nu_{k_1} \leqslant a$ 和 $\tau_1(a) = \tau_{j_{k_1}}(\nu_{k_1}) \geqslant \tau_1(\nu_{k_1})$, 利用 (H_3) 得

$$\nu_{k_1}^+ \leqslant h_{j_{k_1}}(\nu_{k_1}) \leqslant h_1(a),$$

再由 (3.3.14), 得出

$$\begin{aligned} 0 < F(a) &= \lim_{x \to a+0} F(x) = \lim_{x \to a+0} \nu[\tau_1(x)] - h_1(a) \\ &= \lim_{x \to s_{k_1}+0} \nu(t) - h_1(a) = \nu_{k_1}^+ - h_1(a) \leqslant 0, \end{aligned}$$

矛盾.

情形 3. $F(a) = 0, s_{k_1+1} > \tau_1(a) \geqslant s_{k_1}$. 若 $\tau_1(a) > s_{k_1}$, 由于 $\nu_{k_1} \leqslant a$ 且 $\tau_1(a) > \tau_{j_{k_1}}(\nu_{k_1}) \geqslant \tau_1(\nu_{k_1})$, 必有 $\nu_{k_1} < a$. 根据

$$s_{k_1} = \tau_{j_{k_1}}(\nu_{k_1}) < \tau_1(a) \leqslant \tau_{j_{k_1}}(a), \qquad \nu_{k_1} < a$$

和引理 3.3.3 得到 $h_{j_{k_1}}(\nu_{k_1}) < a$. 令

$$\rho(t) = \nu(t) - a, \qquad t \in (s_{k_1}, \tau_1(a)], \tag{3.3.19}$$

由 $F(a) = \nu(\tau_1(a)) - h_1(a) = 0$,

$$\rho(s_{k_1} + 0) = \nu_{k_1}^+ - a \leqslant h_{j_{k_1}}(\nu_{k_1}) - a < 0, \tag{3.3.20}$$

$$\rho(\tau_1(a)) = \nu(\tau_1(a)) - a = h_1(a) - a = I_1(a), \tag{3.3.21}$$

则必有 $I_1(a) < 0$. 事实上，若不然，则 $\tau_1(a) < s_{k_1}, \rho(t)$ 在 $(s_{k_1}, \tau_1(a)]$ 上连续，通过 (3.3.20)~(3.3.21), 存在 $t^* \in (s_{k_1}, \tau_1(a)]$, 使得 $\nu(t^*) = a$, 即

$$\tau_{j_{k_1}}(\nu(t^*)) \geqslant \tau_1(\nu(t^*)) = \tau_1(a) \geqslant t^* > s_{k_1}. \tag{3.3.22}$$

令

$$\gamma(t) = t - \tau_{j_{k_1}}(\nu(t)), \qquad t \in [t^*, s_{k_1+1}], \tag{3.3.23}$$

显然，由 (3.3.22)~(3.3.23) 得 $\gamma(t^*) = t^* - \tau_{j_{k_1}}(\nu(t^*)) \geqslant 0, \gamma(s_{k_1+1}) < 0$, 这说明 $\exists s_0 \in [t^*, s_{k_1+1})$, 有 $\gamma(s_0) = 0$, 即 $\nu(t)$ 在 $t = s_0$ 再一次与 $s_{j_{k_1}}$ 相碰. 这显然矛盾.

据 (H_1) 的 (ii), 由 $I_1(a) < 0$ 得 $\tau_1'(a) \geqslant 0$. 从 a 的定义和 (3.3.14), 有 $F_+'(a) \geqslant 0$. 因此，由 $\nu(t)$ 的定义和 (H_4), 得

$$0 \leqslant F_+'(a) \leqslant \tau_1'(a) f[\tau_1(a), h(a)] - h_1'(a) < 0, \tag{3.3.24}$$

矛盾.

如果 $\tau_1(a) = s_{k_1}$, 因 $x \in (a, \omega_1]$ 时，$\tau_1(x) > s_{k_1}$, 则必有 $\tau_1'(a) \geqslant 0$. 亦得矛盾. 因此可得 $k = 2$ 时 (3.3.13t) 成立. 由归纳法易证 (3.3.13t) 对任意 $k \geqslant 1$ 成立. □

利用引理 3.3.1, 注 3.3.1 和定理 3.3.1, 易得:

推论 3.3.1 假设 $(\mathrm{H}_1) \sim (\mathrm{H}_4)$ 成立，则对 (I) 的任意解 $x(t)$, 在 I 上有 $\omega(t) \geqslant x(t)$ $(\nu(t) \leqslant x(t))$.

注 3.3.2 (i) 容易看出，我们不必在 $f(t, x)$ 或 $\tau_i(x)$ 上要求单调性的限制，而在 [3], [4] 中总是假定这种限制.

(ii) 如果 $\tau_k(x) \equiv \mathrm{cons}$(常数). 定理 3.3.1 就是关于固定时刻 (I) 的一般比较原理.

(iii) 如果 $I(x) \equiv 0$, 这表明 $(\mathrm{H}_1), (\mathrm{H}_3), (\mathrm{H}_4)$ 自动满足，定理 3.3.1 就是关于常微分方程的标准比较原理 —— 引理 3.3.2.

注 3.3.3 如果 (H_2) 被任何唯一性条件代替，定理 3.3.1 的结论也成立.

Kaul 最近在 [12] 中得出的比较定理只是下面结果的一种特殊情况. 这种情况下，我们能证明 $\omega(t) \geqslant x(t) \geqslant \nu(t), t \in I$. 事实上，注意 $f(\cdot, x) \in C(J)$. 利用

Weierstrass 定理易见存在 $f_n \in C^\infty(J)$ 满足 $|f_n(t,x)-f(t,x)| < \varepsilon_n(\varepsilon_n \to 0, n \to \infty)$. 易取 $\overline{f}_n \in C^\infty(J)$ 满足 $\overline{f}_n(t,x)$一致收敛到$f(t,x)$, 且$\overline{f}_n(t,x) < f(t,x)$.

设 $x_n(t)$ 是 $\begin{cases} x' = \overline{f}_n(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ 的解, 则由引理 3.3.2 我们知在 I 上 $\omega(t) \geqslant x_n(t)$. 由 (II) 解的唯一性, 不难证明在 I 的任何有界子集上 $x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$. 所以注 3.3.3 的结论是正确的.

定理 3.3.2 假设 $(\mathrm{H}_1) \sim (\mathrm{H}_2)$ 成立, 且下面假设之一成立. 对于 $(t,x) \in I \times J$ 和 $k \geqslant 1$,

(i) $\tau_k'(x) \geqslant 0, h_k'(x) > 0, h_k'(x)f(t,x) \geqslant f(t,h_k(x))$;

(ii) $\tau_k'(x) \leqslant 0, h_k'(x) > 0, h_k'(x)f(t,x) \leqslant f(t,h_k(x))$.

若 $\omega(t_0) \geqslant \nu(t_0)$, 则在 I 上 $\omega(t) \geqslant \nu(t)$.

证明 只需证明条件之一成立时 (H_4) 满足. 对于 (i), 注意 (H_1) 得

$$\tau_k'(x)f(t,h_k(x)) \leqslant h_k'(x)\tau_k'(x)f(t,x) < h_k'(x),$$

因此 (H_4) 满足.

和上面证明相同, (ii) 成立时 (H_4) 也满足. □

注 3.3.4 比较 [13] 中的比较定理 2.1 和以上定理 3.3.2 的情形 (i), 容易发现我们不需要 $f(t,x), x \in I$ 非减的限制.

§3.4 脉冲摄动微分系统关于两个测度的稳定性

本节利用变分李雅普诺夫函数方法, 研究脉冲摄动微分系统关于两个测度的稳定性.

考虑如下脉冲微分系统:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} y' = F(t,y), & t \neq \tau_k, \\ \Delta y = I_k(y), & t = \tau_k, \\ y(t_0^+) = x_0, & k = 1,2,\cdots, \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} x' = f(t,x), & t \neq \tau_k, \\ \Delta x = h_k(x), & t = \tau_k, \\ x(t_0^+) = x_0, & k = 1,2,\cdots, \end{cases}$$

其中 $f(t,x) = F(t,x) + R(t,x), h_k(x) = I_k(x) + Q_k(x), R(t,x)$ 与 $Q_k(x)$ 均为摄动项, F, f, I_k, h_k 满足一定的条件以保证系统 (I), (II) 的解整体存在唯一, 并且对所有的 k, 当 $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$ 时, 系统 (I), (II) 的解关于初值具有连续依赖性. 同时

脉冲时刻满足：$0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_k < \cdots$ 且当 $k \to \infty$ 时，$\tau_k \to \infty$. 设 $y(t) = y(t;t_0,x_0)$ 及 $x(t) = x(t;t_0,x_0)$ 分别为系统 (I), (II) 的任意解.

进一步我们假定如下条件：

(A_1) $F: R_+ \times R^n \to R^n$, 对所有的 k, F 在 $(\tau_{k-1},\tau_k] \times R^n$ 上连续，并且在其上具有连续偏导数 $\dfrac{\partial F}{\partial x}$;

(A_2) 对每一个 $x \in R^n, k = 1,2,\cdots$, 当 $(t,y) \to (\tau_k, x)$ 时，$F, \dfrac{\partial F}{\partial x}$ 具有有限极限;

(A_3) $I_k: R^n \to R^n$ 连续可微.

引理 3.4.1(见文 [1])　假设条件 (A_1)—(A_3) 成立，设 $y(t) = y(t;t_0,x_0)$ 是系统 (I) 的定义在 $[t_0,\infty)$ 上的任意解，则有

(i) $\dfrac{\partial y}{\partial x_0}(t;t_0,x_0)$ 存在且是初值问题

$$
\text{(III)}\quad \begin{cases} Z' = F_y(t, y(t;t_0,x_0))Z, & t \neq \tau_k, \\ \Delta Z = \dfrac{\partial I_k}{\partial y}(y(\tau_k))Z, & t = \tau_k, \\ Z(t_0^+) = I, & k = 1,2,\cdots \end{cases}
$$

的解，并使得 $\dfrac{\partial y}{\partial x_0}(t_0;t_0,x_0)$ 为单位矩阵;

(ii) $\dfrac{\partial y}{\partial t_0}(t;t_0,x_0)$ 存在且是 (III) 的解并满足

$$
\frac{\partial y}{\partial t_0}(t;t_0,x_0) = -\frac{\partial y}{\partial x_0}(t;t_0,x_0)F(t_0,x_0), \qquad t \geqslant t_0.
$$

对所有的 k, 当 $s \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$ 时，在引理 3.4.1 的条件下，$\dfrac{\partial y(t;s,x(s))}{\partial t_0}$, $\dfrac{\partial y(t;s,x(s))}{\partial x_0}$ 存在并连续. 现阐述变分李雅普诺夫函数方法的思想 (参考文献 [17]～[19]).

若令 $P(s) = y(t;s,x(s)), t_0 \leqslant s \leqslant t$. 对所有的 k, 当 $s \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$ 时，$P(s)$ 左连续，此时

$$
P'(s) = \frac{\partial y(t;s,x(s))}{\partial t_0} + \frac{\partial y(t;s,x(s))}{\partial x_0} f(t,x) \triangleq G(t,s,x). \tag{3.4.1}
$$

两边对 s 从 t_0 到 t 积分，得

$$
\int_{t_0}^{t} P'(s)ds = \int_{t_0}^{t} G(t,s,x)ds,
$$

而同时有

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} P'(s)ds &= \int_{t_0}^{\tau_1} P'(s)ds + \int_{\tau_1}^{\tau_2} P'(s)ds + \cdots + \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} P'(s)ds + \int_{\tau_n}^{t} P'(s)ds \\ &= P(\tau_1) - P(t_0) + P(\tau_2) - P(\tau_1^+) + \cdots \\ &\quad + P(\tau_n) - P(\tau_{n-1}^+) + P(t) - P(\tau_n^+) \\ &= P(t) - P(t_0) - \sum_{t_0<\tau_k<t} \Delta P(\tau_k).\end{aligned}$$

从而得 $P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^{t} G(t,s,x)ds + \sum_{t_0<\tau_k<t} \Delta P(\tau_k)$. 由 $P(s)$ 的取法知

$$x(t) = y(t) + \int_{t_0}^{t} G(t,s,x)ds + \sum_{t_0<\tau_k<t} \Delta P(\tau_k). \tag{3.4.2}$$

若令 $P(s) = \|y(t;s,x(s))\|^2, t_0 \leqslant s \leqslant t$. 对所有的 k, 当 $s \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$ 时有

$$P'(s) = 2y(t;s,x(s))G(t,s,x).$$

两边对 s 从 t_0 到 t 积分，同样可得

$$P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^{t} 2y(t;s,x(s))G(t,s,x)ds + \sum_{t_0<\tau_k<t} \Delta P(\tau_k),$$

即

$$\|x(t)\|^2 = \|y(t)\|^2 + \int_{t_0}^{t} 2y(t;s,x(s))G(t,s,x)ds + \sum_{t_0<\tau_k<t} \Delta P(\tau_k). \tag{3.4.3}$$

不失一般性，令

$$P(s) = V(s, y(t;s,x(s))), \qquad t_0 \leqslant s \leqslant t,$$

其中 $V: R_+ \times R^n \to R_+$, 对所有的 k, V 在 $(\tau_k, \tau_{k+1}] \times R^n$ 上连续且其一阶导数可积，并对每一个 $x \in R^n$, 存在 $\lim\limits_{(t,y)\to(\tau_k^+,x)} V(t,y) = V(\tau_k^+, x)$.

类似前面的讨论，同样有

$$V(t,x(t)) = V(t_0,y(t)) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{ds}(s,y(t;s,x(s)))ds + \sum_{t_0<\tau_k<t} \Delta V(\tau_k), \tag{3.4.4}$$

其中 $s \in (\tau_k, \tau_{k+1}], k = 1, 2, \cdots$.

进一步由引理 3.4.1 知，$\dfrac{\partial y}{\partial t_0}(t;t_0,x_0), \dfrac{\partial y}{\partial x_0}(t;t_0,x_0)$ 是系统 (III) 的解且满足

$$\frac{\partial y}{\partial t_0}(t;t_0,x_0)+\frac{\partial y}{\partial x_0}(t;t_0,x_0)F(t_0,x_0)\equiv 0,\qquad t\geqslant t_0. \tag{3.4.5}$$

由 (3.4.1)~(3.4.2) 及 (3.4.4) 知,

$$\begin{aligned} x(t) &= y(t)+\int_{t_0}^{t}G(t,s,x)ds+\sum_{t_0<\tau_k<t}\Delta P(\tau_k)\\ &= y(t)+\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial y}{\partial t_0}(t;s,x(s))+\frac{\partial y}{\partial x_0}(t;s,x(s))F(s,x(s))\right.\\ &\quad\left.+\frac{\partial y}{\partial x_0}(t;s,x(s))R(s,x(s))\right]ds+\sum_{t_0<\tau_k<t}\Delta P(\tau_k)\\ &= y(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial y}{\partial x_0}(t;s,x(s))R(s,x(s))ds+\sum_{t_0<\tau_k<t}\Delta P(\tau_k). \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

由 (3.4.6) 知, 要估计 $\|x(t)\|$, 将必须估计 $\left\|\dfrac{\partial y}{\partial x_0}(t;s,x(s))\right\|, \|R(s,x(s))\|$ 及 $\|\Delta P(\tau_k)\|$, 这便影响了摄动项的一些性质，但若利用 (3.4.3), (3.4.5) 就有

$$\|x(t)\|^2=\|y(t)\|^2+\int_{t_0}^{t}2y(t;s,x(s))\frac{\partial y}{\partial x_0}(t;s,x(s))R(s,x(s))ds+\sum_{t_0<\tau_k<t}\Delta P(\tau_k),$$

从而克服了这一缺点.

我们始终假设 $F(t,0)\equiv 0, f(t,0)\equiv 0, I_k(0)\equiv 0$ 及 $h_k(0)\equiv 0$, 以保证系统 (I), (II) 有零解. 这样只需讨论系统 (I), (II) 零解的有关性质.

假设

(B_1) $f:R_+\times R^n\to R^n$ 在 $(\tau_k,\tau_{k+1}]\times R^n$ 上连续，且对每一个 $x\in R^n, k=1,2,\cdots$, 有 $\lim\limits_{(t,y)\to(\tau_k^+,x)}f(t,y)=f(\tau_k^+,x)$;

(B_2) 对每一个 $x\in R^n$, $k=1,2,\cdots$, 有 $\lim\limits_{(t,y)\to(\tau_k^+,x)}F(t,y)=F(\tau_k^+,x)$;

(B_3) $h_k:R^n\to R^n$ 连续.

本节始终假设条件 (A_1)—(A_3) 及 (B_1)—(B_3) 成立.

对于 $(t,x)\in(\tau_{k-1},\tau_k]\times R^n, k=1,2,\cdots$, 我们引入变分李雅普诺夫函数 $V(s,y(t,s,x(s)))$ 及其 Dini 导数

$$\begin{aligned} &D^+V(t,s,x)\\ \equiv\ &D^+V(s,y(t,s,x))\\ \equiv\ &\lim_{h\to 0^+}\sup\frac{1}{h}[V(s+h,y(t,s+h,x+hf(s,x)))-V(s,y(t,s,x))], \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

其中 $y(t;s,x)$ 是系统 (II) 的满足 $y(s;s,x)=x$ 的任意解.

定义 3.4.1　设 $V:R_+\times R^n\to R_+$, 若 V 满足

(1) 对所有的 k,V 在 $(\tau_k,\tau_{k+1}]\times R^n$ 上连续且其一阶导数可积并对每一个 $x\in R^n$, $\lim\limits_{(t,y)\to(\tau_k^+,x)}V(t,y)=V(\tau_k^+,x)$ 存在;

(2) V 关于 x 满足局部利普希茨条件, 则称 $V\in V_0'$.

定义 3.4.2　设 $\lambda:R_+\to R_+$ 是可测函数, 若 $\lambda(s)$ 满足

$$\int_I\lambda(\sigma)d\sigma=\infty,$$

则称 $\lambda(s)$ 是积分正的, 其中 $I=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}[\alpha_i,\beta_i],\alpha_i<\beta_i<\alpha_{i+1}$ 且 $\beta_i-\alpha_i\geqslant\delta>0$.

下面将利用变分李雅普诺夫函数方法建立一个新的比较定理, 首先需要如下引理.

引理 3.4.2(见文献 [16])　若 $\rho(t)=\rho(t,t_0,u_0)$ 是纯量方程

$$\begin{cases}u'=g(t,u),\\ u(t_0)=u_0\end{cases}$$

在 $J=[t_0,t_0+\tau]$ 上的最小解, $0<\tau\leqslant+\infty$. 又设

$$m'(t)\geqslant g(t,m(t)),$$

则当 $m(t_0)\leqslant u_0$ 时, 有

$$m(t)\leqslant\rho(t),\qquad t\in J.$$

定理 3.4.1　设 $V:R_+\times R^n\to R_+^N,V\in V_0'$ 且对每一个 $(t,s),\|y(t,s,x)\|$ 关于 x 满足局部利普希茨条件, 又

$$\begin{cases}D^+V(s,y(t,s,x))\leqslant g(t,s,V(s,y(t,s,x))), & s\neq\tau_k,\\ V(s,y(t,s,x+h_k(x)))\leqslant\Psi_k(V(s,y(t,s,x))), & s=\tau_k,k=1,2,\cdots,\end{cases}$$

其中 $g:R_+^2\times R_+^N\to R^N$ 在 $(\tau_k,\tau_{k+1}](k=1,2,\cdots)$ 上关于 s 连续, 且对每一个 $t\in R_+,u\in R_+^N$, 对所有的 k 都有 $\lim\limits_{(t,s,w)\to(t,\tau_k^+,u)}g(t,s,w)=g(t,\tau_k^+,u)$ 成立, 并且 $g(t,s,u)$ 关于 u 拟单调不减, $\Psi_k:R_+^N\to R_+^N$ 不减. 设 $r(t,s,t_0,u_0)$ 是系统

$$\text{(IV)}\qquad\begin{cases}\dfrac{du}{ds}=g(t,s,u), & s\neq\tau_k,\\ u(\tau_k^+)=\Psi_k(u(\tau_k)), & s=\tau_k,\\ u(t_0^+)=u_0\geqslant 0, & k=1,2,\cdots\end{cases}$$

定义在 $(t_0,t]$ 上的最大解，则当 $V(t_0,y(t;t_0,x_0))\leqslant u_0$ 时，有

$$V(t,x(t;t_0,x_0))\leqslant r_0(t;t_0,u_0),\qquad t\geqslant t_0,\tag{3.4.8}$$

其中 $r_0(t;t_0,u_0)\equiv r(t,t,t_0,u_0)$, $y(t;t_0,x_0)$ 及 $x(t;t_0,x_0)$ 分别是系统 (I), (II) 的解.

证明 设 $y(t)=y(t;s,x(s))$ 是系统 (I) 的在 $(t_0,t]$ 上的以 $(s,x(s))$ 为初始值的任一解，并有 $V(t_0,y(t;t_0,x_0))\leqslant u_0$. 令 $m(t,s)=V(s,y(t,s,x))$, 从而对所有的 k, 当 $s\neq\tau_k$ 时，对充分小的 $h>0$, 有

$$\begin{aligned}&m(t,s+h)-m(t,s)\\=&V(s+h,y(t,s+h,x(s+h)))-V(s,y(t,s,x(s)))\\=&V(s+h,y(t,s+h,x(s+h)))-V(s+h,y(t,s+h,x+hf(s,x(s))))\\&+V(s+h,y(t,s+h,x+hf(s,x(s))))-V(s,y(t,s,x(s))).\end{aligned}$$

由于对每一个 $(t,s),V(t,x)$ 及 $\|y(t,s,x)\|$ 关于 x 满足局部利普希茨条件，从而有

$$D^+m(t,s)\leqslant g(t,s,m(t,s)),\qquad s\neq\tau_k,\quad t_0\leqslant s\leqslant t.\tag{3.4.9}$$

而另一方面，当 $s=\tau_k$ 时，

$$m(t,\tau_k^+)=V(\tau_k^+,y(t;\tau_k^+,x(\tau_k^+)))=V(\tau_k^+,y(t;\tau_k^+,x(\tau_k)+h_k(x(\tau_k))))\leqslant\Psi_k(m(t,\tau_k)).$$

因此当 $s\in[t_0,\tau_1]$ 时，由引理 3.4.2 知

$$m(t,s)\leqslant r(t,s,t_0,u_0),\qquad s\leqslant t.$$

由于 Ψ_k 不减且 $m(t,\tau_1)\leqslant r(t,\tau_1,t_0,u_0)$, 从而有

$$m(t,\tau_1^+)\leqslant\Psi_1(m(t,\tau_1))\leqslant\Psi_1(r(t,\tau_1,t_0,u_0))=r(t,\tau_1^+,t_0,u_0).\tag{3.4.10}$$

因此当 $s\in(\tau_1,\tau_2]$ 时，由 (3.4.9),(3.4.10) 及引理 3.4.2 知

$$m(t,s)\leqslant r(t,s,t_0,u_0),\qquad s\leqslant t.$$

以此类推，可得结果

$$m(t,s)\leqslant r(t,s,t_0,u_0),\qquad t_0\leqslant s\leqslant t.$$

特别地，当 $s=t$ 时，有

$$V(t,x(t;t_0,x_0))\leqslant r_0(t;t_0,u_0),\qquad t\geqslant t_0.$$ □

推论 3.4.1 在定理 3.4.1 中，若 $N=1$, $g(t,s,u)\equiv0$, $u_0=V(t_0,y(t;t_0,x_0))$ 且

(1) 对所有的 k, $\Psi_k(u)=u$, 则有

$$V(t,x(t;t_0,x_0))\leqslant V(t_0,y(t;t_0,x_0)),\qquad t\geqslant t_0. \tag{3.4.11}$$

特别地取 $V(t,x)=\|x\|$, 则由 (3.4.11) 得

$$\|x(t;t_0,x_0)\|\leqslant\|y(t;t_0,x_0)\|,\qquad t\geqslant t_0.$$

(2) $\Psi_k(u)=d_ku$, $d_k\geqslant 0$ 对所有的 k 均成立，则有

$$V(t,x(t;t_0,x_0))\leqslant V(t_0,y(t;t_0,x_0))\prod_{t_0<\tau_k<t}d_k,\qquad t\geqslant t_0.$$

推论 3.4.2 在定理 3.4.1 中, 若 $N=1$, $g(t,s,u)\equiv-\alpha u$, $u_0=V(t_0,y(t;t_0,x_0))$ 且 $\Psi_k(u)=d_ku$, $d_k\geqslant 0$ 对所有的 k 均成立，则有

$$V(t,x(t;t_0,x_0))\leqslant[V(t_0,y(t;t_0,x_0))\prod_{t_0<\tau_k<t}d_k]\exp[-\alpha(t-t_0)],\qquad t\geqslant t_0. \tag{3.4.12}$$

特别地取 $V(t,x(t))=\|x\|$, 则 (3.4.12) 可写为

$$\|x(t;t_0,x_0)\|\leqslant\|y(t;t_0,x_0)\|\prod_{t_0<\tau_k<t}d_ke^{-\alpha(t-t_0)},\qquad t\geqslant t_0.$$

由上式可以看出，摄动项的出现，有时会改变解的一些性质.

推论 3.4.3 在定理 3.4.1 中,若 $N=1$, $g(t,s,u)=\lambda'(s)u$, $u_0=V(t_0,y(t;t_0,x_0))$ 且 $\Psi_k(u)=d_ku$, $d_k\geqslant 0$ 对所有的 k 均成立，则有

$$V(t,x(t;t_0,x_0))\leqslant[V(t_0,y(t;t_0,x_0))\prod_{t_0<\tau_k<t}d_k]\exp[\lambda(t)-\lambda(t_0)],\qquad t\geqslant t_0.$$

推论 3.4.4 在定理 3.4.1 中，若对所有的 k ，有 $F(t,y)\equiv 0$, $I_k(y)=y$, 则 $V(t_0,x_0)\leqslant u_0$ 意味着

$$V(t,x(t;t_0,x_0))\leqslant r(t;t_0,u_0),\qquad t\geqslant t_0.$$

事实上，此时 $y(t;t_0,x_0)\equiv x_0$. 更进一步 (3.4.7) 化为

$$D^+V(s,x)\equiv\lim_{h\to 0^+}\sup\frac{1}{h}[V(s+h,x+hf(s,x))-V(s,x)],$$

从而说明本文的比较定理是引理 3.4.2 的推广.

推论 3.4.5 在 $N=1$ 的条件下，若

$$\begin{cases}D^+V(s,y(t,s,x))\leqslant-c(h_1(s,h(t,s,x)))\lambda(s), & s\neq\tau_k,\\ V(\tau_k^+,y(t,\tau_k^+,x+h_k(x)))\leqslant V(\tau_k,y(t,\tau_k,x)), & k=1,2,\cdots,\end{cases}$$

其中 $c \in K, h_1 \in \Gamma$ 且 $\lambda(s)$ 是积分为正的. 则当 $t \geqslant t_0$ 时

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) \leqslant V(t_0, y(t, t_0, x_0)) - \int_{t_0}^{t} c(h_1(s, y(t, s, x(s))))\lambda(s)ds.$$

证明 令

$$W(s, y(t, s, x(s))) = V(s, y(t, s, x(s))) + \int_{t_0}^{s} c(h_1(\sigma, y(t; \sigma, x(\sigma))))\lambda(\sigma)d\sigma,$$

易知当 $s \neq \tau_k$ 时有

$$D^+W(s, y(t; s, x(s))) \leqslant D^+V(s, y(t; s, x(s))) + c(h_1(s, y(t; s, x(s))))\lambda(s) \leqslant 0$$

且

$$\begin{aligned}
&W(\tau_k^+, y(t; \tau_k^+, x + h_k(x))) \\
&= V(\tau_k^+, y(t; \tau_k^+, x + h_k(x))) + p\int_{t_0}^{\tau_k} c(h_1(\sigma, y(t; \sigma, x(\sigma))))\lambda(\sigma)d\sigma \\
&\leqslant V(\tau_k, y(t; \tau_k, x)) + \int_{t_0}^{\tau_k} c(h_1(\sigma, y(t; \sigma, x(\sigma))))\lambda(\sigma)d\sigma \\
&= W(\tau_k, y(t; \tau_k, x)),
\end{aligned}$$

从而由推论 3.4.2(1) 知

$$W(t, x(t)) \leqslant W(t_0, y(t)),$$

即

$$V(t, x(t; t_0, x_0)) \leqslant V(t_0, y(t; t_0, x_0)) - \int_{t_0}^{t} c(h_1(s, y(t; s, x(s))))\lambda(s)ds. \qquad \square$$

定义 3.4.3 令 $h_0, h_1, h \in \Gamma$. 设 $y(t) = y(t; t_0, x_0)$ 是系统 (I) 的任意解, 称系统 (I) 是

(1) $(h_0, \tilde{h}_1)$ 稳定的: 若对任意 $\varepsilon > 0, t_0 \in R^+$, 都存在 $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ 使得当 $h_0(t_0^+, x_0) < \delta$ 时有 $h_1(t_0^+, y(t)) < \varepsilon, t \geqslant t_0$;

(2) $(h_0, \tilde{h}_1)$ 一致稳定的: 若 (1) 中的 δ 不依赖于 t_0;

(3) $(h_0, \tilde{h}_1)$ 吸引的: 若对任意的 $\varepsilon > 0, t_0 \in R^+$, 都存在 $\delta_1 = \delta_1(t_0) > 0, T = T(t_0, \varepsilon) > 0$, 使得当 $h_0(t_0^+, x_0) < \delta_1$ 时有 $h_1(t_0^+, y(t)) < \varepsilon, t \geqslant t_0 + T$;

(4) $(h_0, \tilde{h}_1)$ 一致吸引的: 若在 (3) 中, δ 与 T 均不依赖于 t_0;

(5) $(h_0, \tilde{h}_1)$ 渐近稳定的: 若 (1) 与 (3) 同时成立;

(6) $(h_0, \tilde{h}_1)$ 一致渐近稳定的: 若 (2) 与 (4) 同时成立;

(7) $(h_0, \tilde{h}_1)$ 严格稳定的: 若对任意的 $\varepsilon_1 > 0$, 存在 $\delta_1 = \delta_1(t_0, \varepsilon_1) > 0$, 使得当 $h_0(t_0^+, x_0) < \delta_1$ 时有 $h_1(t_0^+, y(t)) < \varepsilon_1, t \geqslant t_0$, 并且对任意 $\delta_2 \in (0, \delta_1]$, 存在 $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(t_0, \delta_2) > 0$, 使得当 $h_0(t_0^+, x_0) \geqslant \delta_2$ 时有 $h_1(t_0^+, y(t)) \geqslant \varepsilon_2; t \geqslant t_0$;

(8) $(h_0,\tilde{h}_1)$ 严格一致稳定的：若 (7) 中 $\delta_1,\delta_2,\varepsilon_2$ 的选取与 t_0 无关；

(9) $(h_0,\tilde{h}_1)$ 不稳定：若 (1) 不成立.

定理 3.4.2 设 $h_0,h_1,h\in\Gamma$, 且

(1) $V\in V_0'$ 且对每一个 $(t,s),\|y(t,s,x)\|$ 关于 x 满足局部利普希茨条件；

(2) $D^+V(t,s,x)\leqslant 0, s\neq\tau_k$,

其中 $(s,x)\in S(h,\rho)=\{(s,x)|h(s,x)<\rho,(s,x)\in R^+\times R^n\}$；

(3) $V(\tau_k^+,x+h_k(x))\leqslant V(\tau_k,x), k=1,2,\cdots$；

(4) V 是 h 正定，h_1 渐小的；

(5) h_0 比 h_1,h 好，即存在 $\phi_1,\Phi\in K$, 使得当 $h_0(t,x)<\rho_1$ 时有 $h_1(t,x)<\phi_1(h_0(t,x)),h(t,x)\leqslant\phi(h_0(t,x))$, 其中 ρ_1 满足 $\phi_1(\rho_1),\phi(\rho_1)\leqslant\rho$;

(6) 存在 $\rho_0\in(0,\rho)$, 使得当 $h(\tau_k,x)<\rho_0$ 时有 $h(\tau_k^+,x+h_k(x))<\rho$,

则由系统 (I) 的 $(h_0,\tilde{h}_1)$ 稳定性质可以推知系统 (II) 的相应的 (h_0,h) 稳定性质.

证明 首先证明在系统 (I) 为 $(h_0,\tilde{h}_1)$ 稳定的前提下，系统 (II) 是 (h_0,h) 稳定的.

由于 V 是 h 正定的，则存在 $\rho>0$ 及 $b\in K$, 使得

$$b(h(t,x))\leqslant V(t,x),\qquad h(t,x)<\rho. \tag{3.4.13}$$

另一方面, 由于 V 是 h_1 渐小的, 从而存在 $\lambda_1>0,a\in K$, 使得当 $h_1(t_0^+,x(t))<\lambda_1$ 时有 $V(t_0^+,x(t))<a(h_1(t_0^+,x(t)))$. 又因为 h_0 比 h_1,h 好，即存在 $\lambda_0>0$, 满足 $\phi_1(\lambda_0)<\lambda_1,\phi(\lambda_0)<\rho$, 使得当 $h_0(t_0^+,x_0)<\lambda_0$ 时有 $h_1(t_0^+,x_0)<\lambda_1,h(t_0^+,x_0)<\rho$, 由上述条件可以得到当 $h_0(t_0^+,x_0)<\lambda_0$ 时有

$$b(h(t_0^+,x_0))\leqslant V(t_0^+,x_0)\leqslant a(h_1(t_0^+,x_0)). \tag{3.4.14}$$

令 $0<\varepsilon<\lambda^*=\min(\rho_0,b^{-1}(a(\lambda_1))),t_0\in R^+$, 由于系统 (I) 是 $(h_0,\tilde{h}_1)$ 稳定的，从而对 $a^{-1}(b(\varepsilon))>0,t_0\in R^+$, 存在 $\delta_1=\delta_1(t_0,\varepsilon)>0$, 满足 $\delta_1<b(\varepsilon)$, 使得当 $h_0(t_0^+,x_0)<\delta_1$ 时有

$$h_1(t_0^+,y(t))<a^{-1}(b(\varepsilon)),\qquad t\geqslant t_0. \tag{3.4.15}$$

取 $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)$, 使得 $\delta\in(0,\lambda_0)$ 且满足 $a(\phi_1(\delta))<\delta_1$, 从而当 $h_0(t_0^+,x_0)<\delta$ 时，由 (3.4.14), (3.4.15) 式及条件 (5) 得

$$\begin{aligned}b(h(t_0^+,x_0))&\leqslant V(t_0^+,x_0)\leqslant a(h_1(t_0^+,x_0))\\&\leqslant a(\phi_1(h_0(t_0^+,x_0)))\leqslant a(\phi_1(\delta))<\delta_1<b(\varepsilon),\end{aligned}$$

即 $h_0(t_0^+,x_0)<\varepsilon$.

下面证明当 $h_0(t_0^+,x_0)<\delta$ 时有 $h(t,x(t))<\varepsilon,t\geqslant t_0$.

若不然，则存在系统 (II) 的满足 $h_0(t_0^+,x_0)<\delta$ 的某一解 $x(t)=x(t;t_0,x_0)$ 及 $t^*>t_0$, 满足对某一 k, 有 $\tau_k<t^*\leqslant\tau_{k+1}$, 使得

$$\varepsilon\leqslant h(t^*,x(t^*)),\quad h(t,x(t))<\varepsilon,\qquad t_0\leqslant t\leqslant\tau_k.$$

由于 $0<\varepsilon<\rho_0$, 所以由条件 (6) 知

$$h(\tau_k^+,x_k^+)=h(\tau_k^+,x_k+h_k(x_k))<\rho,$$

其中 $x_k=x(\tau_k)$, 从而可找到 t^0, 满足 $\tau_k<t^0<t^*$, 使得

$$\varepsilon\leqslant h(t^0,x(t^0))<\rho\text{ 且 }h(t,x(t))<\rho,\qquad t\in[t_0,t^0].$$

故由条件 (2),(3) 及推论 3.4.1(1) 知，在 $t_0\leqslant t\leqslant t^0$ 上有

$$V(t,x(t;t_0,x_0))\leqslant V(t_0,y(t;t_0,x_0)).$$

进一步由条件 (4) 知

$$\begin{aligned}b(\varepsilon)&\leqslant b(h(t^0,x(t^0)))\leqslant V(t^0,x(t^0;t_0,x_0))\leqslant V(t_0,y(t^0;t_0,x_0))\\&\leqslant a(h_1(t_0,y(t^0;t_0,x_0)))<a(a^{-1}b(\varepsilon))=b(\varepsilon),\end{aligned}$$

矛盾. 因此系统 (II) 是 (h_0,h) 稳定的.

下面证明若系统 (I) 为 $(h_0,\tilde{h}_1)$ 渐近稳定，则系统 (II) 是 (h_0,h) 渐近稳定的.

由上面的证明可知，系统 (II) 是 (h_0,h) 稳定的. 于是对 $\varepsilon=\rho,t_0\in R^+$, 存在 $\delta_1=\delta_1(t_0,\varepsilon)>0$, 使得当 $h_0(t_0^+,x_0)<\delta_1$ 时有 $h(t,x(t))<\rho$.

对任意的 $\varepsilon\in(0,\lambda^*),t_0\in R_+$, 由于系统 (I) 是 $(h_0,\tilde{h}_1)$ 吸引的，即对 $a^{-1}b(\varepsilon)>0,t_0\in R_+$, 存在 $\delta_1^*=\delta_1^*(t_0)>0,T=T(t_0,\varepsilon)>0$, 使得当 $h_0(t_0^+,x_0)<\delta_1^*$ 时有 $h_1(t_0^+,y(t))<a^{-1}(b(\varepsilon)),t\geqslant t_0+T$.

取 $\delta_0=\min(\delta_1,\delta_1^*)$, 则当 $h_0(t_0^+,x_0)<\delta_0$ 时，有 $h(t,x(t))<\rho,t\geqslant t_0$.

下证对上述的 $\varepsilon>0,t_0\in R^+$, 系统 (II) 是 (h_0,h) 吸引的.

若不然，则存在序列 $\{t^{(n)}\},t^{(n)}\geqslant t_0+T$ 且当 $n\to\infty$ 时， $t^{(n)}\to\infty$ 并满足

$$\varepsilon\leqslant h(t^{(n)},x(t^{(n)}))<\rho,$$

其中 $x(t)=x(t;t_0,x_0)$ 是系统 (II) 的满足 $h_0(t_0^+,x_0)<\delta_0$ 的某一解，从而有

$$\begin{aligned}b(\varepsilon)&\leqslant b(h(t^{(n)},x(t^{(n)})))\leqslant V(t^{(n)},x(t^{(n)}))\leqslant V(t_0,y(t^{(n)}))\\&\leqslant a(h_1(t_0,y(t^{(n)})))<a(a^{-1}b(\varepsilon))=b(\varepsilon),\end{aligned}$$

得矛盾. 因此系统 (II) 是 (h_0,h) 吸引的.

综上可知，系统 (II) 是 (h_0,h) 渐近稳定的.

系统 (II) 的其他 (h_0,h) 稳定性质也可类似得到. □

注 3.4.1 从证明过程中可以看出，在定理 3.4.1 的条件下，由系统 (I) 的 $(h_0,\tilde{h}_1)$ 一致稳定性质可以推知系统 (II) 的相应的 (h_0,h) 一致稳定性质.

注 3.4.2 当 $h_0(t,x)=h(t,x)=\|x\|$ 时，也可以由系统 (IV) 的 $(h_0,\tilde{h}_1)$ 稳定性质推知系统 (II) 的相应的 (h_0,h) 稳定性质.

定理 3.4.3 在定理 3.4.2 中若将条件 (4),(5) 改为

(4)* V 为 h 正定， h_1 弱渐小;

(5)* h_0 比 h_1,h 弱好.

此时由系统 (I) 的 $(h_0,\tilde{h}_1)$ 一致稳定性质可以推知系统 (II) 的相应的 (h_0,h) 非一致稳定性质.

定理 3.4.4 设 $h_0,h_1,h\in\varGamma$ 且

(1) h_0 比 h 好;

(2) 存在 $V\in V_0'$ 且对每一个 $(t,s),\|y(t,s,x)\|$ 关于 x 满足局部利普希茨条件;

(3) $V(t,x)$ 是 h 正定， h_1 渐小的;

(4) $D^+V(t,s,x)\leqslant -c(h_1(s,y(t,s,x)))\lambda(s), s\neq\tau_k,(s,x)\in S(h,\rho)$,

其中 $c\in K,\lambda(s)$ 是积分为正的;

(5) $V(\tau_k^+,x+h_k(x))\leqslant V(\tau_k,x),k=1,2,\cdots$;

(6) 存在 $\rho_0\in(0,\rho)$, 使得若 $h(\tau_k,x)<\rho_0$, 有 $h(\tau_k^+,x+h_k(x))<\rho$;

(7) 系统 (I) 是 $(h_0,\tilde{h}_1)$ 严格一致稳定的，

则系统 (II) 是 (h_0,h) 一致渐近稳定的.

证明 由于 $V(t,x)$ 是 h 正定， h_1 渐小的，从而存在 $\rho_0\in(0,\rho),\delta_1>0$ 及 $a,b\in K$, 使得

$$b(h(t,x))\leqslant V(t,x),\qquad (t,x)\in S(h,\rho_0),$$

$$V(t_0,x(t))\leqslant a(h_1(t_0,x(t))),\qquad (t_0,x(t))\in S(h_1,\delta_1). \tag{3.4.16}$$

由注 3.4.1 知系统 (II) 是 (h_0,h) 一致稳定的，进一步结合系统 (I) 的 $(h_0,\tilde{h}_1)$ 一致稳定性，可知对 $\varepsilon\in(0,\rho_0)$ 及 δ_1, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得

$$h_0(t_0^+,x_0)<\delta \text{ 意味着 } h(t,x(t))<\varepsilon,\qquad t\geqslant t_0; \tag{3.4.17}$$

$$h_0(t_0^+,x_0)<\delta \text{ 意味着 } h_1(t_0^+,y(t))<\delta_1,\qquad t\geqslant t_0. \tag{3.4.18}$$

由于系统 (I) 是 $(h_0,\tilde{h}_1)$ 严格一致稳定的，从而对上述的 $\delta>0$, 存在 $\varepsilon_2>0$, 使得当 $h_0(t_0^+,x_0)\geqslant\delta$ 时， $h_1(t_0^+,y(t))\geqslant\varepsilon_2,t\geqslant t_0$.

再由 $\lambda(t)$ 是积分为正的，对 $\dfrac{a(\delta_1)+1}{c(\varepsilon_2)} > 0$, 存在自然数 $T = T(\varepsilon) > 0$, 当 $b_i - a_i \geqslant 1/2$ 且 $b_i < a_{i+1}$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{T}\int_{a_i}^{b_i}\lambda(t)dt \geqslant \frac{a(\delta_1)+1}{c(\varepsilon_2)}. \tag{3.4.19}$$

下面证明对 $\delta, T = T(\varepsilon)$ 而言定理结论成立．只需证明存在 $t^* \in [t_0, t_0+T]$, 使得 $h_0(t^*, x(t^*)) < \delta$ 即可．若不然，存在某个解 $x(t) = x(t; t_0, x_0)$, 对所有的 $t \in [t_0, t_0+T]$, 均有 $h_0(t, x(t)) \geqslant \delta$, 从而

$$h_1(s, y(t, s, x(s))) \geqslant \varepsilon_2, \qquad t \geqslant s, s \in [t_0, t_0+T].$$

由条件 (4),(5) 及推论 3.4.5 知，当 $t \in [t_0, t_0+T]$ 时有

$$V(t, x(t)) \leqslant V(t_0, y(t)) - \int_{t_0}^{t} c(h_1(\sigma, y(t; \sigma, x(\sigma))))\lambda(\sigma)d\sigma.$$

特别地当 $t = t_0 + T$ 时，由 (3.4.16)~(3.4.19) 式可得

$$\begin{aligned}
&V(t_0+T, x(t_0+T))\\
\leqslant\ & V(t_0, y(t_0+T)) - \int_{t_0}^{t_0+T} c(h_1(\sigma, y(t_0+T; \sigma, x(\sigma))))\lambda(\sigma)d\sigma\\
\leqslant\ & a(h_1(t_0, y(t_0+T))) - c(\varepsilon_2)\int_{t_0}^{t_0+T}\lambda(\sigma)d\sigma\\
\leqslant\ & a(\delta_1) - c(\varepsilon_2)\sum_{i=1}^{T}\int_{t_0+i-1}^{t_0+i-\frac{1}{2}}\lambda(\sigma)d\sigma\\
\leqslant\ & a(\delta_1) - c(\varepsilon_2)\frac{a(\delta_1)+1}{c(\varepsilon_2)}\\
<\ & 0,
\end{aligned}$$

这与 $V \geqslant 0$ 矛盾，故系统 (II) 是 (h_0, h) 一致渐近稳定的. □

下面给出一个关于系统 (II) 零解 (h_0, h) 不稳定的定理.

定理 3.4.5 设

(1) 存在某一 $\rho_1 > 0$ 及 $\tau \in R^+$, 使得 $S_1(h, \rho) \subset S_1(h_0, \rho_1)$, 并存在一个函数 $V: S_1(h_0, \rho_1) \to R, V \in V_0'$ 且 $V(t, 0) \equiv 0$, 其中 $S_1(h_0, \rho_1) = \{(t, x)|h_0(t, x) < \rho_1, t \geqslant \tau\}$;

(2) 对任意的 $\delta > 0, t_0 > \tau > 0$, 都存在满足 $h_0(t_0^+, x_0) < \delta$ 的 x_0 使得 $V(t_0^+, x_0) > 0$;

(3) 存在 $a \in K$ 使得

$$V(t, x) \leqslant a(h_0(t, x)), \qquad (t, x) \in S_1(h_0, \rho_1);$$

(4) 存在 $c \in K$, 使得当 $t \neq \tau_k$ 时有

$$D^+V(t;s,x) \geqslant c(h_1(t,y(t;s,x)));$$

(5) $V(\tau_k^+, x+h_k(x)) \geqslant V(\tau_k, x), k=1,2,\cdots;$

(6) 对任意的 $t_0 \geqslant \tau, x_0 \in R^n$, 当 $h_0(t_0^+, x_0) < \rho_1$ 时, 有 $h_0(t_0^+, y(t;t_0,x_0)) < \rho_1, t \geqslant t_0$, 其中 $y(t;t_0,x_0)$ 是系统 (I) 的任意解;

(7) 系统 (I) 的零解是 $(h_0,\tilde{h}_1)$ 严格一致稳定的, 且当 $V(t_0^+,x_0)>0$ 时, 存在 $\eta>0, \alpha>0$ 及一列区间 $(\alpha_i,\beta_i), \alpha_i<\beta_i<\alpha_{i+1}, \beta_i-\alpha_i \geqslant \alpha$, 使得

$$V(t_0^+, y(t;t_0,x_0)) \geqslant \eta, \qquad t \in (\alpha_i,\beta_i),\ i=1,2,\cdots,$$

其中 $y(t;t_0,x_0)$ 为系统 (I) 的任意解,
则系统 (II) 的零解是 (h_0,h) 不稳定的.

证明 由条件 (2) 知, 对任意的 $\delta \in (0,\rho_1), t_0 \geqslant \tau > 0$, 都存在满足 $h_0(t_0^+,x_0) < \delta$ 的 x_0, 使得 $V(t_0^+,x_0)>0$, 再由条件 (7) 知

$$V(t_0^+, y(t;t_0,x_0)) \geqslant \eta, \qquad t \in (\alpha_i,\beta_i), i=1,2,\cdots, \tag{3.4.20}$$

其中 $\alpha_i<\beta_i<\alpha_{i+1}, \beta_i-\alpha_i \geqslant \alpha$.

考虑系统 (II) 的解 $x(t)=x(t;t_0,x_0), t \geqslant t_0$, 下证 $(t,x(t))$ 在某一时刻必将离开 $S_1(h_0,\rho_1)$. 显然, 这一点一经证明, 定理便得到证明.

事实上, 若不然, 则对所有的 $t \geqslant t_0$, 都有 $(t,x(t)) \in S_1(h_0,\rho_1)$, 从而由条件 (6) 知, $(s,y(t;s,x(s))) \in S_1(h_0,\rho_1),\ \ t \geqslant s \geqslant t_0$.

由于 $D^+V(t,s,x) \geqslant 0, V(\tau_k^+,x+h_k(x)) \geqslant V(\tau_k,x), k=1,2,\cdots$, 我们可以知道

$$V(t,x(t;t_0,x_0)) \geqslant V(t_0^+, y(t;t_0,x_0)), \qquad t \geqslant t_0.$$

特别地当 $t \in (\alpha_i,\beta_i)$ 时, 由 (3.4.20) 知, $V(t,x(t)) \geqslant \eta$.

进一步结合条件 (3) 知

$$h_0(t,x(t)) \geqslant a^{-1}(\eta).$$

从而由系统 (I) 零解的 $(h_0,\tilde{h}_1)$ 严格一致稳定性知, 存在 $\varepsilon_2>0$, 使得

$$h_1(s,y(t;s,x(s))) \geqslant \varepsilon_2, \qquad t \geqslant s,\ s \in (\alpha_i,\beta_i). \tag{3.4.21}$$

为方便起见, 我们记 $x(\alpha_i^+)=x_{i1}, x(\beta_i)=x_{i2}$, 并设在区间 (α_i,β_i) 中有 j 个脉冲时刻 $\tau_{i1},\cdots,\tau_{ij}, j=1,2,\cdots$.

另一方面，利用条件 (4),(5) 及式 (3.4.21) 知，当 $t \in (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$ 时有

$$
\begin{aligned}
&a(\rho_1) \geqslant a(h_0(t,x)) \geqslant V(t,x(t)) \geqslant V(\beta_k^+, y(t;\beta_k, x_{k2})) \\
&\geqslant V(\alpha_k^+, y(t;\alpha_k, x_{k1})) + \int_{\alpha_k}^{\beta_k} D^+V(t,s,x)ds \\
&= V(\alpha_k^+, y(t;\alpha_k, x_{k1})) + \int_{\alpha_k}^{\tau_{k1}} D^+V(t,s,x)ds + \int_{\tau_{k1}}^{\tau_{k2}} D^+V(t,s,x)ds \\
&\quad + \cdots + \int_{\tau_{kj}}^{\beta_k} D^+V(t,s,x)ds \\
&\geqslant V(\alpha_k^+, y(t;\alpha_k, x_{k1})) + c(\varepsilon_2)(\beta_k - \alpha_k) \\
&\geqslant V(\beta_{k-1}^+, y(t;\beta_{k-1}, x_{k-1,2})) + c(\varepsilon_2)(\beta_k - \alpha_k) \\
&\vdots \\
&\geqslant V(t_0^+, y(t;t_0, x_0)) + c(\varepsilon_2)\sum_{i=1}^{k}(\beta_i - \alpha_i) \\
&\geqslant V(t_0^+, y(t;t_0, x_0)) + c(\varepsilon_2)\alpha k \\
&\geqslant \eta + c(\varepsilon_2)\alpha k \to \infty, \qquad k \to \infty,
\end{aligned}
$$

矛盾. 因此 $(t, x(t))$ 必将在某一时刻离开 $S_1(h_0, \rho_1)$, 从而系统 (II) 零解是 (h_0, h) 不稳定的. □

为方便起见，我们引入一个新的关于两个测度的有界性概念.

定义 3.4.4　设 $h_0, h_1, h \in \Gamma, y(t) = y(t;t_0,x_0)$ 是系统 (I) 的任一解，称系统 (I) 为:

(1) $(h_0, \tilde{h}_1)$ 等度有界的，若对任意 $\alpha > 0$, $t_0 \in R_+$, 都存在 $\beta = \beta(t_0, \alpha) > 0$ 使得当 $h_0(t_0^+, x_0) < \alpha$ 时，有

$$h_1(t_0^+, y(t)) < \beta, \qquad t \geqslant t_0;$$

(2) $(h_0, \tilde{h}_1)$ 一致有界的，若 (1) 中 β 的选取与 t_0 无关;

(3) $(h_0, \tilde{h}_1)$ 拟最终有界的，若对任意的 $\alpha > 0, t_0 \in R_+$, 都存在 $N > 0$ 及 $T = T(t_0, \alpha) > 0$, 使得当 $h_0(t_0^+, x_0) \leqslant \alpha$ 时，有

$$h_1(t_0^+, y(t)) < N, \qquad t \geqslant t_0 + T;$$

(4) $(h_0, \tilde{h}_1)$ 拟一致最终有界的，若 (3) 中 T 的选取与 t_0 无关;

(5) $(h_0, \tilde{h}_1)$ 等度最终有界的，若 (1) 与 (3) 同时成立;

(6) $(h_0, \tilde{h}_1)$ 一致最终有界的，若 (2) 与 (4) 同时成立.

定义 3.4.5 设 $h_0, h_1, h \in \Gamma, x(t) = x(t; t_0, x_0)$ 是系统 (II) 的任一解，若对任意 $\alpha > 0$， $t_0 \in R_+$，都存在 $\beta = \beta(t_0, \alpha) > 0$ 使得当 $h_0(t_0^+, x_0) < \alpha$ 时，有

$$h(t, y(t)) < \beta, \qquad t \geqslant t_0,$$

则称系统 (II) 是 (h_0, h) 等度有界的.

参阅文献 [2], 我们可以给出其他相应的 (h_0, h) 有界性定义，这里不再赘述.

定义 3.4.6 若对任意 $\alpha > 0$, 都存在 $\beta = \beta(t_0, \alpha) > 0$ 使得当 $0 \leqslant u_0 < \alpha$ 时，有

$$\|u_0(t; t_0, u_0)\| \leqslant \beta, \qquad t \geqslant t_0,$$

则称系统 (IV) 是等度有界的，其中 $u(t, t, t_0, u_0)$ 为系统 (IV)

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \dfrac{du}{ds} = g(t, s, x), & s \neq \tau_k, \\ u(\tau_k^+) = \Psi_k(u(\tau_k)), & s = \tau_k, \\ u(t_0^+) = u_0 \geqslant 0, & k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

的在 $[t_0, t]$ 上的任意解，且 $u_0(t; t_0, u_0) \equiv u(t, t, t_0, x_0)$. 若 β 与 t_0 无关，则称系统 (IV) 是一致有界的.

我们也可给出系统 (IV) 的其他有界性概念.

在已知系统 (I) 具有某种有界性质的前提下，可以得到脉冲摄动微分系统 (II) 具有相应的有界性质的判别准则.

定理 3.4.6 设 $h_0, h_1, h \in \Gamma$ 且

(1) $V \in V_0'$, 且对每一个 $(t, s), \|y(t, s, x)\|$ 关于 x 满足局部利普希茨条件;

(2) $D^+V(t, s, x) \leqslant 0, t_0 \leqslant s \leqslant t$;

(3) $V(\tau_k^+, x + h_k(x)) \leqslant V(\tau_k, x), \quad k = 1, 2, \cdots$;

(4) 存在函数 $b \in \mathcal{K}R$, 使得当 $(t, x) \in R_+ \times R^n$ 时，有

$$b(h(t, x(t))) \leqslant V(t, x(t)),$$

其中 $KR = \{a \in C[R_+, R_+], a(u)$ 关于 u 严格递增，且 $\lim\limits_{u \to \infty} a(u) = \infty\}$;

(5) 存在函数 $a \in \mathcal{K}$, 使得当 $(t, x) \in R_+ \times R^n$ 时，有

$$V(t, x(t)) \leqslant a(h_1(t, x(t))),$$

则由系统 (I) 的 $(h_0, \tilde{h}_1)$ 有界性质可推知系统 (II) 的 (h_0, h) 有界性质.

证明 我们仅证当系统 (I) 为 $(h_0, \tilde{h}_1)$ 等度有界时，系统 (II) 为 (h_0, h) 等度有界.

由系统 (I) 的 $(h_0,\tilde{h}_1)$ 等度有界性知，对任意的 $\alpha>0$, 存在 $\beta_1=\beta_1(t_0,\alpha)>0$ 使得当 $h_0(t_0^+,x_0)<\alpha$ 时，有

$$h_1(t_0^+,y(t))<\beta_1,\qquad t\geqslant t_0. \tag{3.4.22}$$

由条件 (4), 选取 $\beta=\beta(t_0,\alpha)>0$ 使得 $b(\beta)>a(\beta_1)$.

下证当 $h_0(t_0^+,x_0)<\alpha$ 时，有 $h(t,x(t))<\beta$, $t\geqslant t_0$.

由条件 (2)~(3) 及推论 3.4.1(1) 知

$$V(t,x(t))\leqslant V(t_0,y(t)).$$

进一步结合 (3.4.22) 式，得

$$b(h(t,x(t)))\leqslant V(t,x(t))\leqslant V(t_0,y(t))\leqslant\alpha(h_1(t_0,y(t)))<\alpha(\beta_1)<b(\beta).$$

因而有 $h(t,x(t))<\beta$, $t\geqslant t_0$, 即系统 (II) 为 (h_0,h) 等度有界. □

关于系统 (II) 的其他 (h_0,h)-有界性质的证明可类似给出.

定理 3.4.7　设 $h_0,h_1,h\in\Gamma$ 且

(1) 定理 3.4.6 中的条件 (1), (3)—(5) 成立;

(2) $D^+V(t;s,x)\leqslant g(t,s,V(s,y(t;s,x)))$, $\quad t_0\leqslant s\leqslant t$, 其中 $g\in C[R_+^3,R]$;

(3) 系统 (I) 为 $(h_0,\tilde{h}_1)$ 等度有界的,

则由系统 (IV) 的等度有界性能推知系统 (II) 的 (h_0,h) 等度有界性.

证明　由于系统 (I) 是 $(h_0,\tilde{h}_1)$ 等度有界的，则对任意的 $\alpha>0$, 存在 $\beta_1=\beta_1(t_0,\alpha)>0$ 使得当 $h_0(t_0^+,x_0)\leqslant\alpha$ 时，有 $h_1(t_0^+,y(t))\leqslant\beta_1$, $t\geqslant t_0$.

记 $\beta_2=\max\limits_{h_1(t_0^+,y(t))\leqslant\beta_1}V(t_0,y)>0$. 由条件 (1) 及 (IV) 的等度有界性知，存在 $\beta=\beta(t_0,\alpha)>0$ 使得当 $0\leqslant u_0\leqslant\beta_2$ 时，有

$$||u(t;t_0,u_0)||\leqslant b(\beta),\qquad t\geqslant t_0. \tag{3.4.23}$$

记 $x(t)=x(t;t_0,x_0)$, $y(t)=y(t;,t_0,x_0)$, 则由条件 (1), (2) 及定理 3.4.1 知

$$V(t,x(t))\leqslant r_0(t;t_0,V(t_0,y(t))),\qquad t\geqslant t_0,$$

其中 $r(t,s,t_0,u_0)$ 是系统 (IV) 在 $(t_0,t]$ 上的最大解， $r_0(t;t_0,u_0)\equiv r(t,t,t_0,u_0)$ 且 $u_0=V(t_0,y(t))<\beta_2$. 从而由条件 (1) 及式 (3.4.23) 得

$$b(h(t,x(t)))\leqslant V(t,x(t))\leqslant r_0(t;t_0,V(t_0,y(t)))<b(\beta),\qquad t\geqslant t_0,$$

即 $h(t,x(t))<\beta$, $t\geqslant t_0$. 因而系统 (II) 的解是 (h_0,h) 等度有界的. □

定理 3.4.8　设 $h_0,h_1,h\in\Gamma$ 且

(1) $V \in V_0'$, 并对每一个 (t,s), $||y(t,s,x)||$ 关于 x 满足利普希茨条件;

(2) 存在函数 $b \in \mathcal{K}R$, 使得

$$b(h,(t,x(t))) \leqslant V(t,x(t)), \qquad (t,x) \in R_+ \times R^n;$$

(3) 存在函数 $a \in \mathcal{K}$, 使得

$$V(t,x(t)) \leqslant a(h_1(t,x(t))), \qquad (t,x) \in R_+ \times R^n;$$

(4) 存在一有界可微函数 $M(s)$, 使得 $M'(s) = m(s)$ 且

$$D^+V(t,s,x) \leqslant m(s)V(t,s,x), \qquad t \neq \tau_k, \quad t_0 \leqslant s \leqslant t;$$

(5) $V(\tau_k^+, x + h_k(x)) \leqslant d_k V(\tau_k, x)$, 其中 $d_k > 0$ 对所有的 k 成立且 $\prod\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ 收敛,

则由系统 (I) 的 $(h_0, \tilde{h}_1)$ 有界性质可以推知系统 (II) 的 (h_0, h) 有界性质.

证明 只须证明在系统 (I) 为 $(h_0, \tilde{h}_1)$ 等度有界的条件下, 系统 (II) 是 (h_0, h) 等度有界的. 系统 (II) 的其他 (h_0, h) 有界性质可类似得到.

由于系统 (I) 是 $(h_0, \tilde{h}_1)$ 等度有界的, 则对任意的 $\alpha > 0$, $t_0 \in R_+$ 都存在 $\beta_1 = \beta_1(t_0, \alpha) > 0$, 使得当 $h_0(t_0^+, x_0) < \alpha$ 时有

$$h_1(t_0^+, y(t)) < \beta_1, \qquad t \geqslant t_0. \tag{3.4.24}$$

又因为 $M(t)$ 为一有界函数, 从而存在常数 $K > 0$ 使得

$$||M(t)|| < K, \qquad t \geqslant t_0. \tag{3.4.25}$$

又由 $d_k > 0$ 对所有的 k 成立, 且 $\prod\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ 收敛, 则存在 $N > 0$ 使得

$$\prod_{k=1}^{\infty} d_k \leqslant N. \tag{3.4.26}$$

从而对上述的 $\alpha > 0$, $t_0 \in R_+$, 取 $\beta = \beta(t_0, \alpha)$ 使得

$$b(\beta) \geqslant a(\beta_1) N \exp(K - M(t_0)).$$

下面证明当 $h_0(t_0^+, x_0) < \alpha$ 时, 有 $h(t, x(t)) < \beta$, $t \geqslant t_0$. 由条件 (4), (5) 及推论 3.4.3 知

$$V(t,x(t)) \leqslant [V(t_0, y(t;t_0,x_0)) \prod_{t_0<\tau_k<t} d_k] \exp[M(t) - M(0)], \qquad t \geqslant t_0. \tag{3.4.27}$$

进一步由条件 (2), (3) 及式 (3.4.24)—(3.4.27) 知

$$\begin{aligned} b(h(t,x(t))) &\leqslant V(t,x(t)) \\ &\leqslant [V(t_0,y(t;t_0,x_0))\prod_{t_0<\tau_k<t} d_k]\exp[M(t)-M(t_0)] \\ &< [a(h_1(t_0,y(t))\prod_{t_0<\tau_k<t} d_k]\exp[M(t)-M(t_0)] \\ &< a(\beta_1)N\exp(K-M(t_0)) \\ &\leqslant b(\beta), \end{aligned}$$

从而有 $h(t,x(t))<\beta$, $t\geqslant t_0$. □

类似定理 3.4.8 的证明可以得到下面的定理.

定理 3.4.9 设 $h_0,h_1,h\in\Gamma$ 且

(1) 定理 3.4.8 的条件 (1)—(3) 及 (5) 成立;

(2) 存在 $\alpha\geqslant 0$ 使得

$$D^+V(t,s,x)\leqslant -\alpha V(t,s,x),\qquad t\neq\tau_k,\quad t_0\leqslant s\leqslant t,$$

则由系统 (I) 的 $(h_0,\tilde{h}_1)$ 有界性质可以推知系统 (II) 的 (h_0,h) 有界性质.

下面通过一个例子来说明定理的应用.

例 3.4.1 考虑如下系统:

$$\text{(VII)}\quad \begin{cases} y'=-1-y^2, & t\neq \dfrac{k\pi}{4}, \\ \Delta y=1, & t=\dfrac{k\pi}{4}, \\ y(0^+)=0, & k=1,2,\cdots, \end{cases}$$

$$\text{(VIII)}\quad \begin{cases} x'=-1-x^2+\dfrac{x+6t(1+x^2)}{3(1+t^2)}, & t\neq \dfrac{k\pi}{4}, \\ \Delta x=\beta_k x=1+\beta_k x-1, & t=\dfrac{k\pi}{4}, \\ x(0^+)=0, & k=1,2,\cdots, \end{cases}$$

其中 β_k 满足 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+\beta_k)^2$ 收敛.

取 $h_0=h_1=h=||x||$, 易知系统 (VII) 是 $(h_0,\tilde{h}_1)$ 等度有界的.

取 $V(t,x)=x^2$, 则有

$$\begin{aligned} D^+V(t,x) &= 2x\cdot x' = 2x\cdot\left[-1-x^2+\frac{x+6t(1+x^2)}{3(1+t^2)}\right] \\ &\leqslant 2\|x\|\cdot\left\|-1-x^2+\frac{x+3(1+t^2)(1+x^2)}{3(1+t^2)}\right\| \\ &= \frac{2x^2}{3(1+t^2)} \\ &\leqslant \frac{1}{1+t^2}V(t,x), \end{aligned}$$

$$V(\tau_k^+,x+h_k(x))=(x+\beta_k x)^2=(1+\beta_k)^2x^2=(1+\beta_k)^2V(\tau_k,x),$$

即存在有界可微函数 $M(t)=\arctan t$ 及数列 $d_k=(1+\beta_k)^2$, 使得系统 (VII), 系统 (VIII) 及 V 函数满足定理 3.4.8 的所有条件, 从而由定理 3.4.8 知, 系统 (VIII) 是 (h_0,h) 等度有界的.

§3.5 脉冲积分微分系统关于两个测度的稳定性

本节借助 Razumikhin 的思想研究脉冲积分微分系统关于两个测度的稳定性. 考虑脉冲积分微分系统:

$$\begin{cases} x'=f(t,x,Tx), & t\neq t_i, \\ \Delta x|_{t=t_i}=I_i(x), & t=t_i,\quad i=1,2,3,\cdots, \\ x(t_0^+)=x_0, & t_0\geqslant 0, \end{cases} \tag{3.5.1}$$

其中

(i) $\Delta x|_{t=t_i}=x(t_i^+)-x(t_i^-)$;

(ii) $0<t_1<t_2<\cdots<t_i<\cdots$, 且 $\lim\limits_{i\to\infty}t_i=\infty$;

(iii) $f:R_+\times R^n\times R^n\to R^n$ 且 $f\in C[(t_i,t_{i+1}]\times R^n\times R^n,R^n]$;

(iv) $Tx=\int_{t_0}^t K(t,s,x(s))ds$, 其中 $K:R_+^2\times R^n\to R^n$ 且在 $(t_i,t_{i+1}]\times(t_i,t_{i+1}]\times R^n$ 上连续;

(v) $I_i:R^n\to R^n$.

假定系统 (3.5.1) 对所有 $t\geqslant t_0$ 均存在解, 记 (3.5.1) 的满足 $x(t_0^+,t_0,x_0)=x_0$ 的解为 $x(t)=x(t,t_0,x_0),x(t)$ 分段连续且只有第一类间断点 $t=t_i,i=1,2,\cdots$, 满足 $x(t_i^-)=x(t_i),x(t_i^+)=x(t_i)+I_i(x(t_i))$, 且当 $t_0\neq t_i$ 时, $x(t_0^+)=x(t_0)$.

令 $t_0=0$, 记 $G_i=\{(t,x)\in R_+\times R^n: t_{i-1}<t<t_i\}, G=\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i$.

记 $V_0=\{V: R_+\times R^n\to R_+$, 在$G$上连续, $V(t_i^-,x)=\lim\limits_{\substack{(t,y)\to(t_i,x),\\(t,y)\in G_i}}V(t,y)$,

$$V(t_i^+,x)=\lim_{\substack{(t,y)\to(t_i,x),\\(t,y)\in G_{i+1}}}V(t,y), \text{且 } V(t_i^-,x)=V(t_i,x),\ i=1,2,\cdots,\ x\in R^n\}.$$

定义 3.5.1　$D^-V(t,x)=\limsup\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1}{h}[V(t+h,x+hf(t,x,Tx))-V(t,x)]$,
其中 $V\in V_0, t>t_0, x\in PC[R_+,R^n]$.

定义 3.5.2　设 $h_0,h\in\Gamma$, $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 是系统 (3.5.1) 的任意解，称系统 (3.5.1) 为：

(i) (h_0,h) 一致有界：对任意 $\alpha>0, t_0\geqslant 0$, 存在 $\beta=\beta(\alpha)>0$, 使当 $h_0(t_0,x_0)<\alpha$ 时有

$$h(t,x(t))<\beta,\qquad t\geqslant t_0;$$

(ii) (h_0,h) 拟一致最终有界：存在 $B>0$, 对任意 $\alpha>0$, 存在 $T=T(\alpha)>0$, 对任意 $t_0\geqslant 0$, 使当 $h_0(t_0,x_0)<\alpha$ 时有

$$h(t,x(t))<B,\qquad t\geqslant t_0+T;$$

(iii) (h_0,h) 一致最终有界：若 (i), (ii) 同时成立.

先给出系统 (3.5.1) 关于两个测度的有界性定理.

定理 3.5.1　设

(i) $h_0,h\in\Gamma$ 且 $h(t,x)\leqslant\phi(h_0(t,x)),\phi\in K$;

(ii) $V\in C[S^c(h_0,\rho),R_+], V(t,x)$ 关于 x 是局部 Lipschitz 的，存在 $a,b\in K$, 使得

$$a(h(t,x))\leqslant V(t,x)\leqslant b(h_0(t,x)),\qquad (t,x)\in S^c(h_0,\rho),$$

其中 $a(r)\to\infty,\ r\to\infty$;

(iii) 当 $P(V(t,x(t)))>V(s,x(s)),\ t_1\leqslant s\leqslant t,\ t_1\geqslant t_0$ 时有

$$D^-(V(t,x(t)))\leqslant -c(h_0(t,x(t))),\qquad (t,x(t))\in S^c(h_0,\rho),$$

其中 $P\in C[R_+,R_+]$, 当 $u>0$ 时有 $P(u)>u, c\in K$, 这里 $x(t)$ 是系统 (3.5.1) 的任意解；

(iv) $V(t_i^+,x+I_i(x))\leqslant V(t_i,x),\ h_0(t_i^+,x+I_i(x))\leqslant\psi(h_0(t_i,x)), i=1,2,\cdots,(t_i,x)\in S^c(h_0,\rho)$,

则系统 (3.5.1)(h_0,h) 一致有界.

证明 设任意 $\alpha \geqslant \rho$, 取 $\beta = \max\{a^{-1}(b(\alpha)), \phi(\alpha), \alpha+1, \psi(\alpha)+1\}$. 对任意 $t_0 \in R_+$, 考虑系统 (3.5.1) 满足 $h_0(t_0, x_0) < \alpha$ 的任意解 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$. 显然

$$h(t_0, x_0) \leqslant \phi(h_0(t_0, x_0)) < \phi(\alpha) \leqslant \beta.$$

下证

$$h(t, x(t)) < \beta, \qquad t \geqslant t_0. \tag{3.5.2}$$

反证之. 否则存在 (3.5.1) 满足 $h_0(t_0, x_0) < \alpha$ 的某个解 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, 存在 $t^* > t_0$ 使得 $h(t^*, x(t^*)) \geqslant \beta$. 则存在 $\tau_1, \tau_2 : t_0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant t^*$ 使得

$$h_0(\tau_1^+, x(\tau_1^+)) \geqslant \alpha, \qquad h_0(\tau_1, x(\tau_1)) \leqslant \alpha, \qquad h(\tau_2^+, x(\tau_2^+)) \geqslant \beta,$$

且

$$(t, x(t)) \in S(h, \beta) \cap S^c(h_0, \alpha), \qquad t \in [\tau_1, \tau_2). \tag{3.5.3}$$

先证

$$V(\tau_1^+, x(\tau_1^+)) < a(\beta). \tag{3.5.4}$$

若 $\tau_1 \neq t_i$, 则 $h_0(\tau_1, x(\tau_1)) = \alpha$, 由 (ii) 得

$$V(t_1, x(t_1)) \leqslant b(h_0(t_1, x(t_1))) = b(\alpha) < a(\beta).$$

若 $\tau_1 = t_i$(对某个 i), 则 $h_0(\tau_1, x(\tau_1)) \leqslant \alpha$, 从而

$$V(\tau_1, x(\tau_1)) \leqslant b(h_0(\tau_1, x(\tau_1))) \leqslant b(\alpha) < a(\beta).$$

这样由 (iv) 得 $V(\tau_1^+, x(\tau_1^+)) < a(\beta)$.

再证

$$V(t^+, x(t^+)) < a(\beta), \qquad t \in [\tau_1, \tau_2]. \tag{3.5.5}$$

若不然，令 $\tau = \inf\{\tau_2 \geqslant t > \tau_1 : V(t^+, x(t^+)) \geqslant a(\beta)\}$.

考虑两种情况:

(I) $\tau \neq t_i, i = 1, 2, \cdots$, 由 $V(t, x(t))$ 在 τ 处连续有

$$V(\tau^+, x(\tau^+)) = a(\beta).$$

因此当 $h < 0$ 且 $|h|$ 充分小时有

$$V(\tau + h, x(\tau + h)) < a(\beta),$$

从而

$$D^- V(\tau, x(\tau)) = \limsup_{h \to 0^-} \frac{1}{h}[V(\tau + h, x(\tau + h)) - V(\tau, x(\tau))] \geqslant 0. \tag{3.5.6}$$

另一方面由 τ 的选择

$$P(V(\tau,x(\tau)))>V(\tau,x(\tau))\geqslant v(s,x(s)),\qquad \tau_1\leqslant s\leqslant\tau.$$

这样由 (iii) 及 (3.5.3) 式

$$D^-V(\tau,x(\tau))\leqslant -c(h_0(\tau,x(\tau)))\leqslant -c(\alpha)<0,$$

这与 (3.5.6) 矛盾.

(II) $\tau=t_j$, 对某个 $j\in\{1,2,\cdots,i,\cdots\}$, 若 $V(t_j^+,x(t_j^+))>a(\beta)$, 则由 (iv) 知 $V(t_j,x(t_j))>a(\beta)$. 由 $V(t,x(t))$ 在 t_j 处左连续可知存在 $\hat\tau<t_j$, 使得 $V(\hat\tau^+,x(\hat\tau^+))\geqslant a(\beta)$, 这与 τ 的选择矛盾. 因此有 $V(t_j^+,x(t_j^+))=a(\beta)$.

对 $h<0,|h|$ 充分小, $t_j+h\in(t_{j-1},t_j)$, 我们有

$$V(t_j+h,x(t_j+h))<a(\beta).$$

由 (iv) 得

$$V(\tau,x(\tau))=V(t_j,x(t_j))\geqslant V(t_j^+,x(t_j^+)).$$

因此有

$$V(\tau+h,x(\tau+h))-V(\tau,x(\tau))\leqslant V(t_j+h,x(t_j+h))-V(t_j^+,x(t_j^+))<0,$$

这样可得

$$\begin{aligned}D^-V(\tau,x(\tau))&=\limsup_{h\to0^-}\frac{1}{h}[V(\tau+h,x(\tau+h))-V(\tau,x(\tau))]\\&\geqslant\limsup_{h\to0^-}\frac{1}{h}[V(t_j+h,x(t_j+h))-V(t_j^+,x(t_j^+))]\geqslant0.\end{aligned}\tag{3.5.7}$$

因为

$$P(V(\tau,x(\tau)))>V(\tau,x(\tau))\geqslant V(s,x(s)),\qquad \tau_1\leqslant s\leqslant\tau,$$

由 (iii) 得

$$D^-V(\tau,x(\tau))\leqslant -c(h_0(\tau,x(\tau)))\leqslant -c(\alpha)<0.$$

这与 (3.5.7) 矛盾. 因此 (3.5.5) 成立.

另一方面, 由 (ii) 得

$$V(\tau_2^+,x(\tau_2^+))\geqslant a(h(\tau_2^+,x(\tau_2^+)))\geqslant a(\beta),$$

这与 (3.5.5) 矛盾. 于是 (3.5.2) 成立. □

定理 3.5.2　在定理 3.5.1 的条件下可得系统 (3.5.1)(h_0,h) 一致最终有界.

证明 由定理 3.5.1 知系统 (3.5.1)(h_0,h) 一致最终有界：存在 $B>0$, 使当 $h_0(t_0,x_0)<\rho$ 时，

$$h(t,x(t))<B, \qquad t\geqslant t_0. \tag{3.5.8}$$

考虑系统 (3.5.1) 的解 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 满足 $h_0(t_0,x_0)<\alpha$, $\alpha>\rho$ 为任意数. 由系统 (3.5.1) 的 (h_0,h) 一致有界性知存在 $\beta=\beta(\alpha)>\max\{B,a^{-1}(b(\alpha))\}$ 使

$$h(t,x(t))<\beta, \qquad t\geqslant t_0.$$

由 (iii) 存在 $\lambda=\inf\limits_{a(B)\leqslant u\leqslant a(\beta)}\{P(u)-u\}>0$, 使得

$$P(u)\geqslant u+\lambda, \qquad a(B)\leqslant u\leqslant a(\beta) \tag{3.5.9}$$

且存在正整数 N 满足

$$a(B)+(N-1)\lambda>a(\beta). \tag{3.5.10}$$

取 $T=N\dfrac{\lambda}{c(\rho)}$. 定义

$$t_m=t_0+m\frac{\lambda}{c(\rho)}, \qquad m=0,1,\cdots,N, \tag{3.5.11}$$

则 $t_N=t_0+T$. 只需证

$$h(t,x(t))<B, \qquad t\geqslant t_0+T.$$

反证：否则存在 $t^*>t_0+T$, 使得

$$h(t^*,x(t^*))\geqslant B. \tag{3.5.12}$$

由 (3.5.8),(3.5.12) 得

$$h_0(t,x(t))\geqslant\rho, \qquad t\in[t_0,t^*]. \tag{3.5.13}$$

由 (ii) 知

$$V(t_0,x(t_0))\leqslant b(h_0(t_0,x_0))<b(\alpha)<a(\beta).$$

先证

$$V(t,x(t))<a(\beta), \qquad t\in[t_0,t^*]. \tag{3.5.14}$$

若不然，令 $\xi=\inf\{t^*\geqslant t>t_0:V(t,x(t))\geqslant a(\beta)\}$.

若 $\xi\neq t_i, i=1,2,\cdots$, 则由 ξ 的定义有

$$V(\xi,x(\xi))=a(\beta).$$

因此当 $h<0$ 且 $|h|$ 充分小时有

$$V(\xi+h,x(\xi+h))<a(\beta),$$

从而有

$$D^-V(\xi,x(\xi))\geqslant 0. \tag{3.5.15}$$

另一方面由 ξ 的选择

$$P(V(\xi,x(\xi)))>V(\xi,x(\xi))\geqslant v(s,x(s)),\qquad t_0\leqslant s\leqslant \xi.$$

这样由 (iii) 及 (3.5.13) 式得

$$D^-V(\xi,x(\xi))\leqslant -c(h_0(\xi,x(\xi)))\leqslant -c(\rho)<0.$$

这与 (3.5.15) 矛盾.

若 $\xi=t_j$, 对某个 $j\in\{1,2,\cdots,i,\cdots\}$, 则由定理 3.5.1 的证明可知

$$V(t_j^+,x(t_j^+))=a(\beta)$$

且

$$D^-V(\xi,x(\xi))\geqslant \limsup_{h\to 0^-}\frac{1}{h}[V(t_j+h,x(t_j+h))-V(t_j^+,x(t_j^+))]\geqslant 0. \tag{3.5.16}$$

但是

$$P(V(\xi,x(\xi)))>V(\xi,x(\xi))\geqslant V(s,x(s)),\qquad t_0\leqslant s\leqslant \xi.$$

由 (iii) 得

$$D^-V(\xi,x(\xi))\leqslant -c(h_0(\xi,x(\xi)))\leqslant -c(\rho)<0.$$

这与 (3.5.16) 矛盾. 因此 (3.5.14) 式成立.

下证

$$V(t,x(t))<a(B)+(N-m-1)\lambda,\qquad t\in[t_m,t^*],\ m=0,1,\cdots,N-1. \tag{3.5.17}$$

用归纳法. 首先 $m=0$ 时, 由 (3.5.10),(3.5.14) 知

$$V(t,x(t))<a(B)+(N-1)\lambda,\qquad t\in[t_0,t^*].$$

假设对某个 $m:0\leqslant m<N-1$, 有

$$V(t,x(t))<a(B)+(N-m-1)\lambda,\qquad t\in[t_m,t^*]. \tag{3.5.18}$$

先证存在 $\tilde{t}\in[t_m,t_{m+1}]$, 使得

$$V(\tilde{t},x(\tilde{t}))<a(B)+(N-m-2)\lambda. \tag{3.5.19}$$

若不然，则有

$$V(t,x(t))\geqslant a(B)+(N-m-2)\lambda,\qquad t\in[t_m,t_{m+1}]. \tag{3.5.20}$$

分两种情况考虑:

(A) 若 $t\neq t_i,i=1,2,\cdots,t\in[t_m,t_{m+1}]$, 由 (3.5.9),(3.5.18),(3.5.20) 得

$$\begin{aligned}P(V(t,x(t)))&\geqslant V(t,x(t))+\lambda\geqslant a(B)+(N-m-1)\lambda\\&>V(s,x(s)),\qquad t_m\leqslant s\leqslant t,\ t\in[t_m,t_{m+1}].\end{aligned}$$

又 $(t,x(t))\in S^c(h_0,\rho),\ t\in[t_m,t_{m+1}]$, 由 (iii) 得

$$\begin{aligned}V(t_{m+1},x(t_{m+1}))&\leqslant V(t_m,x(t_m))-\int_{t_m}^{t_{m+1}}c(h_0(s,x(s)))ds\\&<a(B)+(N-m-1)\lambda-c(\rho)(t_{m+1}-t_m)\\&\leqslant V(t_{m+1},x(t_{m+1})),\end{aligned}$$

矛盾.

(B) 若存在 $t_{i_k}\in[t_m,t_{m+1}],i_k\in\{1,2,\cdots\},\ k=1,2,\cdots,j;\ j\geqslant 1$. 由 (3.5.9),(3.5.18),(3.5.20) 得

$$\begin{aligned}P(V(t,x(t)))&\geqslant V(t,x(t))+\lambda\geqslant a(B)+(N-m-1)\lambda\\&>V(s,x(s)),\qquad t_m\leqslant s\leqslant t,\ t\in[t_m,t_{m+1}].\end{aligned}$$

又 $(t,x(t))\in S^c(h_0,\rho),\ t\in[t_m,t_{m+1}]$, 由 (iii) 得

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}}D^-V(s,x(s))ds\leqslant-\int_{t_m}^{t_{m+1}}c(h_0(s,x(s)))ds\leqslant-c(\rho)(t_{m+1}-t_m)=-\lambda. \tag{3.5.21}$$

由 (iv) 得

$$V(t_{i_k},x(t_{i_k}))-V(t_{i_k}^+,x(t_{i_k}^+))\geqslant 0,\qquad k=1,2,\cdots,j. \tag{3.5.22}$$

于是有

$$\begin{aligned}\int_{t_m}^{t_{m+1}}D^-V(s,x(s))ds&=\int_{t_{i_j}}^{t_{m+1}}D^-V(s,x(s))ds+\int_{t_{i_{j-1}}}^{t_{i_j}}D^-V(s,x(s))ds+\cdots\\&\quad+\int_{t_{i_1}}^{t_{i_2}}D^-V(s,x(s))ds+\int_{t_m}^{t_{i_1}}D^-V(s,x(s))ds\\&\geqslant V(t_{m+1},x(t_{m+1}))+[V(t_{i_j},x(t_{i_j}))-V(t_{i_j}^+,x(t_{i_j}^+))]+\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&+[V(t_{i_1},x(t_{i_1}))-V(t_{i_1}^+,x(t_{i_1}^+))]-V(t_m,x(t_m))\\&\geqslant V(t_{m+1},x(t_{m+1}))-V(t_m,x(t_m)).\end{aligned}\tag{3.5.23}$$

由 (3.5.18),(3.5.20),(3.5.21),(3.5.22) 得

$$V(t_{m+1},x(t_{m+1}))\leqslant V(t_m,x(t_m))-\lambda<a(B)+(N-m-2)\lambda\leqslant V(t_{m+1},x(t_{m+1})),$$

得矛盾.

再证

$$V(t,x(t))<a(B)+(N-m-2)\lambda,\qquad \tilde{t}\leqslant t\leqslant t^*,\tilde{t}\in[t_m,t_{m+1}].$$

若不然，令

$$\eta=\inf\{t^*\geqslant t>\tilde{t}:V(t,x(t))\geqslant a(B)+(N-m-2)\lambda\}.$$

与证明 (3.5.14) 式类似得矛盾. 这样证得

$$V(t,x(t))<a(B)+(N-m-2)\lambda,\qquad t\in[t_{m+1},t^*].$$

由归纳法证得 (3.4.17) 式. 取 $m=N-1$ 得 $V(t,x(t))<a(B)$, $t\in[t_{N-1},t^*]$.

另一方面，由 (ii) 有

$$V(t^*,x(t^*))\geqslant a(h(t^*,x(t^*)))\geqslant a(B),$$

得矛盾，从而系统 (3.5.1)(h_0,h) 一致最终有界. □

下面研究脉冲积分微分系统 (3.5.1) 关于两个测度的稳定性.

为方便给出下面的假设 (H):

(H) $g_0,g\in C[R_+^2,R],g_0(t,u)\leqslant g(t,u),r(t,t_0,u_0)$ 是系统

$$u'=g(t,u),\qquad u(t_0)=u_0\geqslant 0$$

在 $[t_0,+\infty)$ 上的右行最大解，且 $\eta(t,t^0,v_0)$ 是系统

$$v'=g_0(t,v),\qquad v(t^0)=v_0\geqslant 0$$

在 $t_0\leqslant t\leqslant t^0$ 上的左行最大解.

引理 3.5.1　假设

(i) $g:R_+^2\to R$ 在 $(t_i,t_{i+1}]\times R_+$ 上连续，$\lim\limits_{\substack{(t,v)\to(t_i,u),\\ t>t_i}} g(t,v)=g(t_i^+,u)$ 存在且 $r(t,t_0,u_0)$ 是系统

$$\begin{cases}u'=g(t,u), & t\neq t_i,\\ u(t_i^+)=\psi_i(u(t_i)), & i=1,2,3,\cdots,\\ u(t_0^+)=u_0, & t_0\geqslant 0\end{cases}\tag{3.5.24}$$

在 $[t_0,+\infty)$ 上的最大解;

(ii) $g_0 \in C[[t_i,t_{i+1})\times R_+,R]$ 且在每个 $[t_i,t_{i+1})\times R_+$ 上 g_0,g 满足 (H);

(iii) $V\in V_0, V(t,x)$ 关于 x 是局部 Lipschitzian, 且

$$D_-V(t,x)\leqslant g(t,V(t,x)),\qquad t\geqslant t_0, t\neq t_i,\ x\in\Omega,$$

其中 $\Omega=\{x\in PC[R_+,R^n]:V(s,x(s))\leqslant \eta(s,t,V(t,x(t))), t_0\leqslant s\leqslant t\}$ 且

$$D_-V(t,x)=\liminf_{h\to 0^-}\frac{1}{h}[V(t+h,x+hf(t,x,Tx))-V(t,x)];$$

(iv) $V(t^+,x+I_i(x))\leqslant \psi_i(V(t,x)),\ t=t_i$, 其中 $\psi_i:R_+\to R_+$ 是非减的.

若 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 是系统 (3.5.1) 在 $[t_0,\infty)$ 的任意解, 则当 $V(t_0^+,x_0)\leqslant u_0$ 时有

$$V(t,x(t))\leqslant r(t,t_0,u_0),\qquad t\geqslant t_0.$$

下面用引理 3.5.1 证明系统 (3.5.1) 关于两个测度的稳定性比较定理.

定理 3.5.3 假设引理 3.5.1 的条件成立, 且进一步设

(i) $h_0,h\in\Gamma$ 且 h_0 比 h 一致好;

(ii) $V(t,x)h$ 定正且 h_0 渐小;

(iii) 存在 $\rho_0>0$ 使当 $(t,x)\in S(h,\rho_0)$ 时对所有 i 有 $(t_i,x+I_i(x))\in S(h,\rho)$,

则由纯量脉冲微分方程 (3.5.24) 的零解一致渐近稳定可推出系统 (3.5.1)(h_0,h) 一致渐近稳定.

证明 由 $V(t,x)h$ 定正: 存在 $\sigma>0, b\in K$ 使当 $h(t,x)<\sigma$ 时有

$$b(h(t,x))\leqslant V(t,x).\tag{3.5.25}$$

给定 $0<\varepsilon<\rho^*=\min\{\rho_0,\sigma,\rho\}$. 由 (3.5.24) 的零解一致稳定, 对 $b(\varepsilon)>0$, 存在 $\delta_0>0$ 使得对任意 $t_0\in R_+$, 当 $0\leqslant u_0\leqslant\delta_0$ 时有

$$u(t,t_0,u_0)<b(\varepsilon),\qquad t\leqslant t_0,\tag{3.5.26}$$

其中 $u(t,t_0,u_0)$ 是 (3.5.25) 的任意解, $u_0=V(t_0,x_0)$. 由假设 (i), (ii), 我们知道存在 $\delta_1>0, a\in K$ 使得

$$h(t_0,x_0)<\sigma, V(t_0^+,x_0)\leqslant a(h_0(t_0,x_0)),\qquad (t_0,x_0)\in S(h_0,\delta_1).\tag{3.5.27}$$

取 $\delta=\delta(\varepsilon)$, 使得 $0<\delta<\delta_1$, $a(\delta)<\delta_0$. 令 $h_0(t_0,x_0)<\delta$, 这样由 (3.5.25),(3.5.26) 知当 $h_0(t_0,x_0)<\delta$ 时有

$$b(h(t_0,x_0))\leqslant V(t_0,x_0)=u(t_0,t_0,x_0)<b(\varepsilon),$$

从而有 $h(t_0,x_0)<\varepsilon$.

下证对于系统 (3.5.1) 的任意解 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$, 当 $h_0(t_0,x_0)<\delta$ 时有

$$h(t,x(t))<\varepsilon,\qquad t\geqslant t_0.$$

若上述结论不真，则存在系统 (3.5.1) 的某一个满足 $h_0(t_0,x_0)<\delta$ 的解 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 且存在 $t^*>t_0$ 使得对于某个 k 满足 $t_k<t^*\leqslant t_k+1$, 有

$$\varepsilon\leqslant h(t^*,x(t^*))\text{且 }h(t,x(t))<\varepsilon,\qquad t\geqslant t_0.$$

因为 $0<\varepsilon<\rho_0$, 由 (iii) 得

$$h(t_k^+,x_k^+)=h(t_k^+,x_k^++I_k(x_k))<\rho,$$

其中 $x_k=x(t_k)$ 且 $h(t_k,x_k)<\varepsilon$. 因此存在 $\tilde{t}$ 使得 $t_k<\tilde{t}\leqslant t^*$ 满足

$$\varepsilon\leqslant h(\tilde{t},x(\tilde{t}))<\rho.$$

令 $m(t)=V(t,x(t)),\quad t\in[t_0,\tilde{t}]$, 由引理 3.5.1 得

$$V(t,x(t))<r(t,t_0,a(h_0(t_0,x_0))),\qquad t_0\leqslant t\leqslant\tilde{t},\tag{3.5.28}$$

其中 $r(t,t_0,u_0)$ 是 (3.5.24) 的最大解，则有

$$b(\varepsilon)\leqslant b(h(\tilde{t},x(\tilde{t})))\leqslant V(\tilde{t},x(\tilde{t}))<b(\varepsilon),$$

得矛盾. 这就证得系统 (3.5.1)(h_0,h) 一致稳定.

由系统 (3.5.1) 的 (h_0,h) 一致稳定性, 取 $\varepsilon=\rho^*,\delta_0^*=\delta(\rho^*)$, 则当 $h_0(t_0,x_0)<\delta_0^*$ 时有

$$h(t,x(t))<\rho^*,\qquad t\geqslant t_0.\tag{3.5.29}$$

为证 (h_0,h) 一致吸引，设 $0<\varepsilon<\rho^*,t_0\in R_+$. 由系统 (3.5.24) 的零解一致吸引，对给定的 $b(\varepsilon)>0,t_0\in R_+$, 存在 $\delta_{10}>0,T=T(\varepsilon)>0$ 使当 $0\leqslant u_0<\delta_{10}$ 时有

$$u(t,t_0,u_0)<b(\varepsilon),\qquad t\geqslant t_0+T.$$

取 $\delta_0=\min\{\delta_0^*,\delta_{10}\}$, 设 $h_0(t_0,x_0)<\delta_0$. 由 (3.5.28),(3.5.29) 得

$$V(t,x(t))\leqslant r(t,t_0,a(h_0(t_0,x_0))),\qquad t\geqslant t_0,$$

从而有

$$b(h(t,x(t)))\leqslant V(t,x(t))\leqslant r(t,t_0,a(h_0(t_0,x_0)))<b(\varepsilon),\qquad t\geqslant t_0+T,$$

这证得系统 (3.5.1)(h_0,h) 一致吸引，从而系统 (3.5.1)(h_0,h) 一致渐近稳定. □

下面用直接方法给出系统 (3.5.1)(h_0,h) 一致稳定结果.

定理 3.5.4 假设

(i) $h_0,h\in\Gamma$ 且 $h(t,x)\leqslant\phi(h_0(t,x))$, $(t,x)\in S(h_0,\delta_0),\delta_0>0,\phi\in K$;

(ii) $V\in V_0,V(t,x)$ 关于 x 是局部 Lipschitzian 的，存在 $a,b\in K$ 使得

$$a(h_0(t,x))\geqslant V(t,x),\qquad (t,x)\in S(h_0,\delta_1),\delta_1>0,$$
$$b(h(t,x)\leqslant V(t,x),\qquad (t,x)\in S(h,\rho);$$

(iii) 当 $P(V(t,x(t)))>V(s,x(s))$, $t_1\leqslant s\leqslant t$, $t_1\geqslant t_0$ 时有

$$D^-(V(t,x(t)))\leqslant -c(h_0(t,x(t))),\qquad (t,x(t))\in S(h,\rho),$$

其中 $P\in C[R_+,R_+]$ 且当 $u>0$ 时有 $P(u)>u,c\in K,x(t)$ 是系统 (3.5.1) 的任意解;

(iv) $V(t_i^+,x+I_i(x))\leqslant V(t_i,x)$, $i=1,2,\cdots$, $(t_i,x),(t_i^+,x+I_i(x))\in S(h,\rho)$;

(v) 存在 $\rho_0:0<\rho_0<\rho$, 使当 $h(t_i,x)<\rho_0$ 时有 $h(t_i^+,x+I_i(x))<\rho$, $i=1,2,\cdots$,
则系统 (3.5.1)(h_0,h) 一致稳定.

证明 设 $0<\varepsilon<\rho_0$, 取 $\delta=\delta(\varepsilon)>0,\delta\leqslant\min\{\delta_0,\delta_1\}$ 使得

$$\phi(\delta)<\varepsilon,\qquad a(\delta)<b(\varepsilon).$$

对 $t_0\in R_+,x_0\in R^n$, 考虑系统 (3.5.1) 满足 $h_0(t_0,x_0)<\delta$ 的任意解 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$. 由 (i) 得

$$h(t_0,x_0)\leqslant\phi(h_0(t_0,x_0))<\varepsilon.$$

下证

$$h(t,x(t))<\varepsilon,\qquad t\geqslant t_0.$$

否则，存在系统 (3.5.1) 满足 $h_0(t_0,x_0)<\delta$ 的解 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$, 存在 $\tau_1>t_0$ 使得

$$h(\tau_1,x(\tau_1))\geqslant\varepsilon$$

且

$$h(t,x(t))<\varepsilon,\qquad t_0\leqslant t<\tau_1.\tag{3.5.30}$$

首先有

$$V(t_0,x_0)\leqslant a(h_0(t_0,x_0))<a(\delta)<b(\varepsilon).$$

下证

$$V(t,x(t))<b(\varepsilon),\qquad t_0\leqslant t\leqslant\tau_1.$$

否则，考虑两种情况：

情形 1. 存在 $t^* \in (t_0, \tau_1]$ 使得 $t_0 < t^* \leqslant t_1$ 满足

$$V(t^*, x(t^*)) \geqslant b(\varepsilon), \qquad h_0(t^*, x(t^*)) \geqslant \delta,$$

则存在 $\tilde{t} \in (t_0, t^*], t^* < t_1$(或 $\tilde{t} \in (t_0, t^*), t^* = t_1$) 使得

$$V(\tilde{t}, x(\tilde{t})) = b(\varepsilon), \qquad h_0(\tilde{t}, x(\tilde{t})) \geqslant \delta$$

且

$$V(t, x(t)) < b(\varepsilon), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant \tilde{t}.$$

对 $h < 0, |h|$ 充分小，有不等式

$$V(\tilde{t} + h, x(\tilde{t} + h)) < V(\tilde{t}, x(\tilde{t})).$$

因此有

$$D^- V(\tilde{t}, x(\tilde{t})) = \limsup_{h \to 0^-} \frac{1}{h}[V(\tilde{t} + h, x(\tilde{t} + h) - V(\tilde{t}, x(\tilde{t}))] \geqslant 0. \tag{3.5.31}$$

由 $\tilde{t}$ 的选择，我们有

$$P(V(\tilde{t}, x(\tilde{t}))) > V(\tilde{t}, x(\tilde{t})) \geqslant V(s, x(s)), \qquad t_0 \leqslant s \leqslant \tilde{t}.$$

由 (3.5.30) 知 $(\tilde{t}, x(\tilde{t})) \in S(h, \rho)$. 这样由 (iii) 得

$$D^- V(\tilde{t}, x(\tilde{t})) \leqslant -c(h_0(\tilde{t}, x(\tilde{t}))) \leqslant -c(\delta) < 0,$$

这与 (3.5.31) 矛盾.

情形 2. 存在 $t^* \in (t_0, \tau_1]$ 使得对某个 $k : t_k < t^* \leqslant t_{k+1}$ 满足

$$h_0(t^*, x(t^*)) \geqslant \delta, \qquad V(t^*, x(t^*)) \geqslant b(\varepsilon)$$

且

$$V(t, x(t)) < b(\varepsilon), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_k. \tag{3.5.32}$$

因为 $0 < \varepsilon < \rho_0$, 由 (v) 得

$$h(t_l^+, x_l^+) = h(t_l^+, x_l + I_l(x_l)) < \rho, \qquad l = 1, 2, \cdots, k,$$

其中 $x_l = x(t_l)$ 且由 (3.5.30) 知 $h(t_l, x_l) < \varepsilon$.

我们考虑两种情况：

(A) 存在 $\tilde{t} \in (t_0, t^*] : t^* < t_{k+1}$(或者 $\tilde{t} \in (t_0, t^*) : t^* = t_{k+1}$), $\tilde{t} \bar{\in} (t_1, t_2, \cdots, t_k)$ 使得 $V(\tilde{t}, x(\tilde{t})) = b(\varepsilon)$, $h_0(\tilde{t}, x(\tilde{t})) \geqslant \delta$, 并且 $V(t, x(t)) < b(\varepsilon)$, $t_0 \leqslant t < \tilde{t}$. 如果 $\tilde{t} \in (t_0, t_k)$, 那么由 (5.3.10) 得

$$V(\tilde{t}, x(\tilde{t})) < b(\varepsilon),$$

这与 $V(\tilde{t}, x(\tilde{t})) = b(\varepsilon)$ 矛盾. 所以一定存在 $\tilde{t} \in (t_0, t^*] : t^* < t_{k+1}$ (或者 $\tilde{t} \in (t_k, t^*) : t^* = t_{k+1}$), 使得对于 $h < 0$ 且 $|h|$ 充分小，有如下不等式成立:

$$V(\tilde{t} + h, x(\tilde{t} + h)) < V(\tilde{t}, x(\tilde{t})),$$

从而有

$$D^- V(\tilde{t}, x(\tilde{t})) = \limsup_{h \to 0^-} \frac{1}{h} [V(\tilde{t} + h, x(\tilde{t} + h)) - V(\tilde{t}, x(\tilde{t}))] \geqslant 0. \tag{3.5.33}$$

类似情况 1 讨论，亦得矛盾.

(B) 存在 $\tilde{t} = t_j, j \in \{1, 2, \cdots, k+1\}$ 使得

$$V(t_j^+, x(t_j^+)) > b(\varepsilon), \quad h_0(t_j, x(t_j)) \geqslant \delta \text{ 且 } V(t, x(t)) \leqslant V(t_j, x(t_j)), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_j;$$

或者

$$V(t_j^+, x(t_j^+)) \leqslant b(\varepsilon), \qquad V(t_j, x(t_j)) \geqslant b(\varepsilon), \qquad h_0(t_j, x(t_j)) \geqslant \delta$$

且

$$V(t, x(t)) \leqslant V(t_j, x(t_j)), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_j.$$

如果 $\tilde{t} = t_j \neq t_{k+1}$, 那么 $t_j \in (t_0, t_k]$. 由 (3.5.30) 得

$$V(t_j, x(t_j)) < b(\varepsilon),$$

这与 $V(t_j, x(t_j)) \geqslant b(\varepsilon)$ 矛盾. 所以我们一定有 $\tilde{t} = t^* = t_{k+1}$, 那么一定存在 $t' \in (t_k, t_{k+1})$ 使得

$$V(t', x(t')) \geqslant b(\varepsilon), \quad h_0(t', x(t')) \geqslant \delta \text{ 且 } V(t, x(t)) < b(\varepsilon), \qquad t_0 \leqslant t < t'.$$

这样也可以得到矛盾. 所以

$$V(t, x(t)) < b(\varepsilon), \qquad t \in [t_0, \tau_1].$$

但是由条件 (ii) 知

$$V(\tau_1, x(\tau_1)) \geqslant b(h(\tau_1, x(\tau_1))) \geqslant b(\varepsilon),$$

得矛盾. □

§3.6　脉冲混合微分系统关于两个测度的稳定性

众所周知，在许多自然现象中，会出现当量增加到一定程度时，反应的性质发生突变的现象. 这时，需要考虑具有瞬时脉冲摄动性质的一族新的脉冲微分系统. 这里将考虑一类特殊而重要的变结构脉冲微分系统，它与脉冲反馈系统相接近，称之为脉冲混合微分系统. 关于脉冲混合微分系统稳定性的研究结果并不多见. 本节主要用比较方法和类似于 Lyapunov 第二方法的直接方法研究此系统零解的稳定性质.

考虑脉冲混合微分系统

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda_k(x_k)), & t \in [t_k, t_{k+1}], \\ x(t_k^+) = x_k^+, x_k^+ = x_k + I_k(x_k), & k = 0, 1, 2, \cdots, \\ x_k = x(t_k), I_0(x_0) \equiv 0, & x(t_0^+) = x_0, \end{cases} \tag{3.6.1}$$

其中 $f \in C[R_+ \times R^n \times R^m, R^n], I_k \in C[R^n, R^n], \lambda_k \in C[R^n, R^m], k = 0, 1, 2, \cdots$.

假定系统

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda_k(y)), \\ x(t_k^+) = y^+, \qquad y^+ = y + I_k(y) \end{cases} \tag{3.6.2}$$

的解对任意固定的 $y \in R^n$ 和任意 $k = 0, 1, 2, \cdots$ 在 $[t_k, t_{k+1}]$ 上存在. 系统 (3.6.1) 的解是有第一类间断点 $t = t_k$ 且在间断点处左连续的分段连续函数.

首先给出如下定义:

定义 3.6.1　设 $V \in C[R^n, R^+], t \in (t_k, t_{k+1}), x, y \in R^n$. 定义

$$D^+V(t, x, y) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h}[V(x + hf(t, x, \lambda_k(y))) - V(x)]. \tag{3.6.3}$$

如果 $V \in C^1[R^n, R^+]$, 则 (3.6.3) 为

$$D^+V(t, x, y) = \frac{\partial}{\partial x} V(x) f(t, x, \lambda_k(y)).$$

定义 3.6.2　$\lambda(t)$ 被称为整体为正，如果 $\lambda(t) : R_+ \to R_+$ 是可测函数，且 $\int_I \lambda(s) ds = \infty$, 其中$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} [\alpha_i, \beta_i], \alpha_i < \beta_i < \alpha_{i+1}$, 且 $\beta_i - \alpha_i \geqslant \delta > 0$.

定义 3.6.3　脉冲混合微分系统 (3.6.1) 的零解被称为:

(i) 稳定的: 如果对任意 $\varepsilon > 0, t_0 \in R_+$, 存在常数 $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, 使当 $\|x_0\| < \delta$ 时，$\|x(t)\| < \varepsilon, t \geqslant t_0$, 其中 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 是 (1) 的任意解;

(ii) 一致稳定的：如果 (i) 中 δ 与 t_0 无关；

(iii) 渐近稳定的：如果它是稳定的且对任意 $\varepsilon > 0, t_0 \in R_+$, 存在正常数 $\delta_0 = \delta_0(t_0)$ 及 $T = T(t_0, \varepsilon)$, 使当 $\|x_0\| < \delta_0$ 时有 $\|x(t)\| < \varepsilon, t \geqslant t_0 + T$.

本节假设 $f(t, 0, \lambda_k(0)) \equiv 0, I_k(0) \equiv 0$ 对任意 k 成立，因此系统 (3.6.1) 的零解存在.

我们需要如下引理：

引理 3.6.1(参见文献 [24]) 假定

(i) $V \in C[R^n, R_+], V(x)$ 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件，且

$$D^+V(t, x, y) \leqslant g(t, V(x), \sigma_k(V(y))), \qquad t \in (t_k, t_{k+1}), x, y \in S(\rho),$$

其中 $\sigma_k \in C[R_+, R_+], g \in C[R_+^3, R]$;

(ii) 存在 $\psi_k \in C[R_+, R_+], \psi_k$ 不减，满足

$$V(x + I_k(x)) \leqslant \psi_k(V(x)), \qquad x \in S(\rho), k = 1, 2, \cdots;$$

(iii) 纯量脉冲混合系统

$$\begin{cases} u' = g(t, u, \sigma_k(u_k)), & t \in [t_k, t_{k+1}], \\ u(t_k^+) = u_k^+, u_k^+ = \psi_k(u_k), & k = 0, 1, 2, \cdots, \\ u_k = u(t_k), \quad \psi_0(u) = u, \quad u(t_0^+) = u_0 \end{cases} \tag{3.6.4}$$

的最大解 $\gamma(t, t_0, u_0)$ 在 $[t_0, \infty)$ 上存在，
则系统 (3.6.1) 满足 $V(x_0) \leqslant u_0$ 的在 $S(\rho)$ 内存在的解 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 有

$$V(x(t)) \leqslant \gamma(t, t_0, u_0), \qquad t \geqslant t_0.$$

现给出关于脉冲混合微分系统稳定性的比较结果.

定理 3.6.1(见文 [24]) 假定引理中 3.6.1 的条件都满足，并且有

(i) $b(\|x\|)V(x) \leqslant a(\|x\|), x \in R_+ S \times (\rho_0)$, 其中 $a, b \in K$;

(ii) 存在 $\rho_0 > 0$ 满足 $x \in S(\rho_0)$ 时 $x + I_k(x) \in S(\rho), \forall k$,

则由系统 (3.6.4) 零解的稳定性质得到系统 (3.6.1) 零解相应的稳定性质.

证明 设 $\varepsilon \in (0, \rho_0), t_0 \in R_+$. 假设系统 (33.6.4) 的零解是稳定的，则对 $b(\varepsilon) > 0, t_0 \in R_+$, 存在 $\delta_1(t_0, \varepsilon) > 0$, 满足当 $0 \leqslant u_0 < \delta_1$ 时有

$$u(t, t_0, u_0) < b(\varepsilon), \qquad t \geqslant t_0, \tag{3.6.5}$$

其中 $u(t, t_0, u_0)$ 是系统 (3.6.4) 的任意解. 取 $\delta = \delta(\varepsilon)$ 使得 $a(\delta) < \delta_1$. 下证当 $\|x_0\| < \delta$ 时有 $\|x(t)\| < \varepsilon, t \geqslant t_0$, 其中 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 是系统 (3.6.1) 的任意解. 若不然，存

在系统 (3.6.1) 的满足 $\|x_0\| < \delta$ 的解 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 和满足 $t_k < t^* \leqslant t_{k+1}$(某$k$) 的 $t^* > t_0$, 有

$$\varepsilon \leqslant \|x(t^*)\|, \quad \|x(t)\| < \varepsilon, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_k. \tag{3.6.6}$$

由 $0 < \varepsilon < \rho_0$, 得 $\|x_k^+\| = \|x_k + I_k(x_k)\| < \rho$, 其中 $x_k = x(t_k), \|x_k\| < \varepsilon$. 因此我们可找到满足 $t_k < \widetilde{t} \leqslant t^*$ 的 $\widetilde{t}$, 使得 $\varepsilon \leqslant \|x(\widetilde{t})\| < \rho$. 令 $u_0 = a(\|x_0\|), m(t) = V(x(t)), t_0 < t \leqslant \widetilde{t}$, 由引理 3.6.1 得 $V(x(t)) \leqslant \gamma(t, t_0, u_0), t_0 < t \leqslant \widetilde{t}$, 其中 $\gamma(t, t_0, u_0)$ 是系统 (3.6.4) 的最大解. 于是

$$b(\varepsilon) \leqslant b(\|x(\widetilde{t})\|) \leqslant V(x(\widetilde{t})) \leqslant \gamma(\widetilde{t}, t_0, u_0) < b(\varepsilon),$$

得矛盾. 所以系统 (3.6.1) 的零解 $x \equiv 0$ 是稳定的.

假设系统 (3.6.4) 的零解 $u \equiv 0$ 是一致稳定的, 则 δ 与 t_0 无关, 因此系统 (3.6.1) 的零解 $x \equiv 0$ 是一致稳定的.

假设系统 (3.6.4) 的零解 $u \equiv 0$ 是渐近稳定的. 由上述证明可知系统 (3.6.1) 的零解 $x \equiv 0$ 是稳定的, 则对 $\varepsilon = \rho_0$, 存在 $\delta_0 = \delta_0(t_0, \rho_0)$ 使当 $\|x_0\| < \delta_0$ 时有

$$\|x(t)\| < \rho_0, \qquad t \geqslant t_0. \tag{3.6.7}$$

为证明吸引性, 令 $0 < \varepsilon < \rho_0, t_0 \in R_+$. 由系统 (3.6.4) 零解 $u \equiv 0$ 的渐近性, 对给定 $b(\varepsilon) > 0, t_0 \in R_+$, 存在 $\delta_0^* = \delta_0^*(t_0) > 0$ 和 $T = T(t_0, \varepsilon)$ 满足当 $0 \leqslant u_0 < \delta_0^*$ 时有

$$u(t, t_0, u_0) < b(\varepsilon), \qquad t \geqslant t_0 + T.$$

取 $\widetilde{\delta} > 0$ 使得 $a(\widetilde{\delta}) < \delta_0^*$. 令 $\sigma = \min(\delta_0, \widetilde{\delta})$ 和 $\|x_0\| < \sigma$. 由 (3.6.7),(3.6.6) 得

$$V(x(t)) \leqslant \gamma(t, t_0, a(\|x_0\|)), \qquad t \geqslant t_0,$$

由此

$$b(\varepsilon) \leqslant V(x(t)) \leqslant \gamma(t, t_0, a(\|x_0\|)) < b(\varepsilon), \qquad t \geqslant t_0 + T.$$

故系统 (3.6.1) 的零解 $x \equiv 0$ 是吸引的. 因此系统 (3.6.1) 的零解 $x \equiv 0$ 是渐近稳定的.

若假设系统 (3.6.4) 的零解 $u \equiv 0$ 是一致渐近稳定的, 则 σ 和 T 将与 t_0 无关, 由此可得系统 (3.6.1) 的零解 $x \equiv 0$ 是一致渐近稳定的.

推论 3.6.1　假定定理 3.6.1 中函数 $g(t, u, \sigma_k(u_k)) = \beta_k u_k, \varphi_k(u) = (1 + d_k)u$, $\beta_k, d_k \geqslant 0, \forall k$, 若无穷级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}[d_{j-1} + \beta_{j-1}(t_j - t_{j-1})]$ 收敛, 则系统 (1) 的零解 $x \equiv 0$ 是一致稳定的. 特别地, 当 $d_k = \beta_k = \frac{1}{2^k}, t_k - t_{k-1} \leqslant \delta, \delta > 0, \forall k$ 时, 结论也成立.

推论 3.6.2 假定定理 3.6.1 中函数 $g(t,u,\sigma_k(u_k)) = -C(u) + \beta_k u_k, \varphi_k(u) = (1+d_k)u, C \in K, \beta_k, d_k \geqslant 0, \forall k$, 若无穷级数 $\sum_{j=1}^{\infty}[d_{j-1} + \beta_{j-1}(t_j - t_{j-1})]$ 收敛，则系统 (3.6.1) 的零解 $x \equiv 0$ 是一致渐近稳定的.

例 3.6.1(见文 [24]) 考虑混合脉冲系统

$$\begin{cases} x' = -y - x(x^2+y^2) + \dfrac{x_k}{k(k-1)}, & t \in [t_k, t_{k+1}], \\ y' = x - y(x^2+y^2), & t \in [t_k, t_{k+1}], \\ x(k^+) = x_k^+, x_k^+ = x_k + \dfrac{1}{k^2}x_k, & k = 1,2,\cdots, \\ y(k^+) = y_k^+, y_k^+ = y_k + \dfrac{1}{k^2}y_k, & k = 1,2,\cdots, \\ x(0^+) = x_0, y(0^+) = y_0. \end{cases} \tag{3.6.8}$$

令 $V(x,y) = x^2 + y^2$, 则 $V(x,y)$ 是正定渐小的且对 $t \in (k, k+1)$ 有

$$V'(x,y) \leqslant -2[V(x,y)]^2 + \frac{2\rho}{k(k-1)}V(x_k,y_k), \qquad |x| + |y| < \rho.$$

对 $t = k$,

$$V(x_k^+, y_k^+) = x_k^2 + y_k^2 \leqslant V(x_k,y_k) + \frac{3}{k^2}V(x_k,y_k).$$

令 $C(u) = 2u^2, \beta_k = \frac{2\rho}{k(k+1)}, d_k = \frac{3}{k^2}$, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}[d_k + \beta_k(k+1-k)] = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{3}{k^2} + \frac{2\rho}{k(k+1)}\right] < \infty.$$

由推论 3.6.2 可知系统 (3.6.8) 的零解是一致渐近稳定的.

下面给出严格一致稳定性的比较结果:

定义 3.6.4 称系统 (3.6.1) 的零解是严格一致稳定的: 对任给 $\varepsilon_1 > 0$, 存在 $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$, 使得当 $|x_0| < \delta_1$ 时有 $|x(t)| < \varepsilon_1, t \geqslant t_0$; 对 $\forall 0 < \delta_2 \leqslant \delta_1$, 存在 $0 < \varepsilon_2 < \delta_2$, 满足当 $|x| > \delta_2$ 时有 $|x(t)| > \varepsilon_2, t \geqslant t_0$.

定义 3.6.5 称系统 (3.6.1) 的零解是严格一致渐近稳定的: 若零解是稳定的且对给定 $\alpha_1 > 0, \varepsilon_1 > 0, t_0 \in R_+, \alpha_2 \leqslant \alpha_1$, 存在 $\varepsilon_2 < \varepsilon_1, T_1 = T_1(\varepsilon_1), T_2 = T_2(\varepsilon_2)$, 满足当 $\alpha_2 \leqslant |x_0| \leqslant \alpha_1$ 时有 $\varepsilon_2 < |x(t)| < \varepsilon_1, t_0 + T_1 \leqslant t_0^+ + T_2$.

在此所需的比较系统如下:

$$\begin{cases} u' = g_1(t,u,\sigma_k(u_k)), & t \in [t_k, t_{k+1}], \\ u(t_k^+) = \psi_k(u(t_k)), \psi_0(u) = u, \quad u(t_0^+) = u_0, & k = 0,1,2,\cdots; \end{cases} \tag{3.6.9a}$$

$$\begin{cases} u' = g_2(t, u, \sigma_k(u_k)), & t \in [t_k, t_{k+1}], \\ u(t_k^+) = \varphi_k(u(t_k)), \varphi_0(u) = u, u(t_0^+) = u_0, & k = 0, 1, 2, \cdots, \end{cases} \tag{3.6.9b}$$

其中 $g_1, g_2 \in C[R_+^3, R], \sigma_k \in C[R_+, R_+], \psi_k \in C[R_+, R_+], \psi_k$ 不减; $\varphi_k \in C[R_+, R_+], \varphi_k$ 不增, $k = 1, 2, \cdots$.

定理 3.6.2 假定

(i) 对每一个 $0 < \eta < \rho, V_\eta \in C[S_\rho, R_+], V_\eta$ 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件, 当 $|x| \geqslant \eta$ 时有

$$b_1(x) \leqslant V_\eta(x) \leqslant a_1(x), \quad a_1, b_1 \in K,$$

$$D^+V_\eta(t, x, y) \leqslant g_1(t, V_\eta(x), \sigma_k(V_\eta(x))), \quad t \in (t_k, t_{k+1}), x, y \in S(\rho), \sigma_k \in C[R_+, R_+],$$

$$V_\eta(x + I_k(x)) \leqslant \psi_k(x), \quad x \in S(\rho), k = 1, 2, \cdots, \psi_k \in C[R_+, R_+], \psi_k\text{不减};$$

(ii) 对每一个 $0 < \sigma < \rho, V_\sigma \in C[S_\rho, R_+], V_\sigma$ 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件, 当 $|x| \leqslant \sigma$ 时有

$$b_2(x) \leqslant V_\sigma(x) \leqslant a_2(x), \quad a_2, b_2 \in K,$$

$$D^+V_\sigma(t, x, y) \geqslant g_2(t, V_\sigma(x), \sigma_k(V_\sigma(x))), \quad t \in (t_k, t_{k+1}), x, y \in S(\rho),$$

$$V_\sigma(x + I_k(x)) \geqslant \varphi_k(x), \quad x \in S(\rho), k = 1, 2, \cdots, \varphi_k \in C[R_+, R_+], \varphi_k\text{不增};$$

(iii) 对每一个 $x \in S_\rho$, 有 $d_k(x) \leqslant x + I_k(x) \leqslant x$, 其中 $0 < d_k < 1$ 且 $x(t_{k-1}^+) < x(t) < x(t_k^+), t \in (t_{k-1}, t_k)$,

则由比较系统 (3.6.9) 的严格一致稳定性质得到系统 (3.6.1) 的零解相应的严格一致稳定性质.

利用引理 3.6.1, 类似定理 3.6.1 的证法可得定理 3.6.2. 详证从略.

推论 3.6.3 当 $g_1(t, V_\eta(x), \sigma_k(V_\eta(x))) = g_2(t, V_\sigma(x), \sigma_k(V_\sigma(x))) = 0, \varphi_k(x) = \psi_k(x) \equiv x$ 且

$$D^+V_\eta(t, x, y) \leqslant -C_1(|x|), \quad D^+V_\sigma(t, x, y) \geqslant -C_2(x), \quad C_1, C_2 \in K,$$

则系统 (3.6.1) 的零解是严格一致渐近稳定的.

下面利用直接方法给出脉冲混合系统零解的一致稳定性、渐近稳定性的结果.

定理 3.6.3 假定

(i) $V \in C[R^n, R_+], V(x)$ 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件, 且有

$$b(\|x\|) \leqslant V(x) \leqslant a(\|x\|), \quad x \in S(\rho),$$

其中 $a, b \in K$;

(ii) $D^+V(t, x, y) \leqslant -\lambda(t, y)C(V(x)),\ t \in (t_k, t_{k+1}),\ x \in S(\rho)$, 其中 $C \in K$, $\lambda : R_+ \times R^m \to R_+$ 可测;

(iii) $V(x+I_k(x)) \leqslant \psi(V(x)), x \in S(\rho)$, 其中 $\psi \in K$;

(iv) 存在常数 $c>0$ 使得 $z \in (0,c)$ 时有

$$-\int_{t_{k-1}}^{t_k} \lambda(s,y)ds + \int_z^{\psi(z)} \frac{ds}{C(s)} \leqslant 0;$$

(v) 存在 $\rho_0 \in (0,\rho)$, 当 $x \in S(\rho_0)$ 时有 $x+I_k(x) \in S(\rho)$,

则系统 (3.6.1) 的零解是一致稳定的.

证明 $\forall 0<\varepsilon<\rho_0, \forall t_0 \in R_+$. 取 $\eta=\min\{b(\varepsilon),c\}$. 由函数 $\psi(s)$ 在 $s=0$ 连续可知，存在常数 $\sigma, 0<\sigma<\eta$, 满足

$$\psi(s)<\eta, \qquad s \in (0,\sigma). \tag{3.6.10}$$

由对函数 a 的假设，存在正数 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 使得

$$a(\delta)<\sigma. \tag{3.6.11}$$

设 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 是系统 (3.6.1) 的满足 $\|x_0\|<\delta$ 的解.

下证: $\|x(t)\|<\varepsilon, t \geqslant t_0$.

若不然，存在满足 $\|x_0\|<\delta$ 的系统 (3.6.1) 的解 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 及 $\widetilde{t}>t_0$: $t_k<\widetilde{t} \leqslant t_{k+1}$ (对某 k 成立) 有

$$\|x(\widetilde{t})\| \geqslant \varepsilon, \ \|x(t)\|<\varepsilon, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_k.$$

由于 $0<\varepsilon<\rho_0$, 以及条件 (v) 可得

$$\|x(t_k^+)\|=\|x(t_k)+I_k(x(t_k))\|<\rho.$$

由此可以找到一个 $t^*: t_k<t^* \leqslant \widetilde{t}$ 满足

$$\rho>\|x(t^*)\| \geqslant \varepsilon, \ \|x(t)\|<\rho, \qquad t_0<t \leqslant t^*. \tag{3.6.12}$$

令 $m(t)=V(x(t)), t \in [t_0,t^*]$. 由条件 (ii), (iii) 可得

$$D^+m(t,y) \leqslant -\lambda(t,y)C(m(t)), \qquad t \in (t_{i-1},t_i), i=1,2,\cdots,k, \tag{3.6.13}$$

$$m(t_i^+) \leqslant \psi(m(t_i)), \qquad i=1,2,\cdots,k. \tag{3.6.14}$$

由 (3.6.13) 可知函数 $m(t)$ 在每一个区间 $(t_{i-1},t_i]$ 上不增，且更特别地,

$$m(t_1) \leqslant m(t_0^+) \leqslant a(\delta)<\sigma<b(\varepsilon). \tag{3.6.15}$$

由上式以及 (3.6.10), (3.6.14) 有

$$m(t_1^+)<\eta<b(\varepsilon), \ m(t)<\eta<b(\varepsilon), \qquad t_1<t<t_2.$$

现在假设

$$m(t_i) \leqslant m(t_{i-1}^+) < b(\varepsilon),$$

则利用 (3.6.13), (3.6.14) 推知

$$\int_{m(t_{i-1}^+)}^{m(t_i)} \frac{ds}{C(s)} \leqslant -\int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda(s,y)ds,$$

$$\int_{m(t_i)}^{m(t_i^+)} \frac{ds}{C(s)} \leqslant \int_{m(t_i)}^{\psi(m(t_i))} \frac{ds}{C(s)}.$$

再结合 (iv) 及 (3.6.15) 可得

$$\int_{m(t_{i-1}^+)}^{m(t_i^+)} \frac{ds}{C(s)} \leqslant -\int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda(s,y)ds + \int_{m(t_i)}^{\psi(m(t_i))} \frac{ds}{C(s)} \leqslant 0. \tag{3.6.16}$$

因为 $C(s) > 0, s > 0$, 故从 (3.6.16) 得出 $m(t_i^+) \leqslant m(t_{i-1}^+)$. 因此由数学归纳法可知

$$m(t_k^+) \leqslant m(t_{k-1}^+) \leqslant \cdots \leqslant m(t_1^+) \leqslant m(t_0^+) < \eta < b(\varepsilon).$$

结合 (i) 及 (3.6.12) 有

$$b(\varepsilon) \leqslant b(\|x(t^*)\|) \leqslant m(t^*) \leqslant m(t_k^+) < b(\varepsilon),$$

得矛盾. 所以系统 (1) 的零解为一致稳定的. □

定理 3.6.4 假定

(i) $V \in C[R^n, R_+], V(0) = 0, V(x)$ 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件;

(ii) $a(\|x\|) \leqslant V(x), x \in S(\rho), a \in K$;

(iii) $D^+V(t,x,y) \leqslant p(t,y)V(x), t \in (t_k, t_{k+1}), k = 0,1,2,\cdots$, 其中 $p(t,y)$ 关于 t 连续;

(iv) 对任意 $x \in S(\rho), V(x + I_k(x)) \leqslant d_k V(x), d_k > 0, k = 1,2,\cdots$;

(v) $\limsup\limits_{k\to\infty} [d_1 \cdots d_k \exp(\int_{t_0}^{t_k} p(s,y)ds)] < +\infty$, 且存在常数 $M > 0$ 使得对 $\forall k = 1,2,\cdots, t \in (t_k, t_{k+1}), y \in S(\rho)$ 有 $\int_{t_{k-1}}^{t} p(s,y)ds \leqslant M$,

则系统 (3.6.1) 的零解是一致稳定的.

证明 由条件 (v), 存在常数 $\lambda > 0$ 使得对任意自然数 n, 有

$$d_1 \cdots d_n \exp\left(\int_{t_0}^{t_n} p(s,y)ds\right) < \lambda. \tag{3.6.17}$$

令 $0 < \varepsilon < \rho$. 由条件 (i), 存在常数 $\delta : 0 < \delta < \varepsilon$ 满足 $\|x_0\| < \delta$ 时有

$$V(x_0) < \frac{a\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)}{(\lambda+1)(e^M+1)}. \tag{3.6.18}$$

下证对系统 (3.6.1) 的满足 $\|x_0\|<\delta$ 的解 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 有

$$\|x(t)\|<\varepsilon, \qquad t\geqslant t_0.$$

否则，将存在两种可能情况：情况 (a) 存在 $t^*>t_0, t^*\neq t_k, k=1,2,\cdots$，使得 $\|x(t)\|<\varepsilon, t\in[t_0,t^*), \|x(t^*)\|=\varepsilon$; 情况 (b) 存在某个脉冲时刻 $t_{k^*}>t_0$ (k^* 是自然数), 使得 $\|x(t)\|<\varepsilon, t\in[t_0,t_{k^*}), \|x(t_{k^*}^+)\|\geqslant\varepsilon$.

情况 (a): 如果在 (t_0,t_{k^*}) 内没有脉冲时刻，则由 (iii), (v) 推知

$$V(x(t_{k^*}))\leqslant V(x_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}p(s,y)ds\right)<\frac{a\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)}{(\lambda+1)(e^M+1)}\times e^M<a\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

如果在 $[t_0,t^*)$ 内有 N 个不规则点，设为 $t_0<t_1<\cdots<t_N<t^*$, 则由条件 (iii) 得

$$V(x(t_1))\leqslant V(x_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t_1}p(s,y)ds\right);$$

$$V(x(t_1^+))\leqslant d_1V(x(t_1))\leqslant d_1V(x_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t_1}p(s,y)ds\right).$$

由数学归纳法，可知对任意自然数 n 有

$$V(x(t_n^+))\leqslant d_1\cdots d_{n-1}V(x_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t_n}p(s,y)ds\right),$$

$$V(x(t_n^+))\leqslant d_1\cdots d_nV(x_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t_n}p(s,y)ds\right). \tag{3.6.19}$$

特别地有

$$V(x(t_N^+))\leqslant d_1\cdots d_NV(x_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t_N}p(s,y)ds\right). \tag{3.6.20}$$

由于 $t^*\in(t_N,t_{N+1})$ 以及 (iii), (3.6.17), (3.6.18), (3.6.20) 可推出

$$\begin{aligned}V(x(t^*))&\leqslant V(x(t_N^+))\exp\left(\int_{t_N}^{t^*}p(s,y)ds\right)\\&\leqslant d_1\cdots d_NV(x_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t_N}p(s,y)ds\right)\exp\left(\int_{t_N}^{t^*}p(s,y)ds\right)\\&<\lambda\times\frac{a\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)}{(\lambda+1)(e^M+1)}\times e^M\\&<a\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).\end{aligned} \tag{3.6.21}$$

另一方面，由 (ii) 得

$$V(x(t^*)) \geqslant a(\|x(t^*)\|) = a(\varepsilon). \tag{3.6.22}$$

与 (3.6.21) 矛盾.

情况 (b): 类似于情况 (a) 中 (3.6.20) 的证明，我们得出

$$V(x(t_{k^*}^+)) \leqslant d_1 \cdots d_{k^*} V(x_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t_{k^*}} p(s,y)ds\right) < \lambda \times \frac{a\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{(\lambda+1)(e^M+1)} < a\left(\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{3.6.23}$$

另一方面，由于 $\|x(t_{k^*}^+)\| = \varepsilon$, 所以存在常数 $\alpha > 0$, 使得 $\|x(t)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}, t \in (t_{k^*}, t_{k^*} + \alpha)$. 由 (ii) 得

$$V(x(t_{k^*}^+)) = \lim_{t \to t_{k^*}^+} V(x(t)) \geqslant \lim_{t \to t_{k^*}^+} a(\|x(t)\|) > a\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

与 (3.6.23) 矛盾.

因此有 $\|x_0\| < \delta, \|x(t)\| < \varepsilon, t \geqslant t_0$, 这说明系统 (3.6.1) 的零解是一致稳定的. □

定理 3.6.5　假定

(i) $V \in C[R^n, R_+], V(x)$ 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件且

$$D^+V(t,x,y) \leqslant 0, \qquad t \in (t_k, t_{k+1}), x, y \in S(\rho),$$
$$V(x + I_k(x)) \leqslant V(x), \qquad x \in S(\rho), k = 1, 2, \cdots;$$

(ii) $b(\|x\|) \leqslant V(x) \leqslant a(\|x\|), x \in S(\rho)$, 其中 $a, b \in K$;

(iii) 存在 $\rho_0 \in (0, \rho)$, 使得当 $x \in S(\rho_0)$ 时有 $x + I_k(x) \in S(\rho)$;

(iv) $D^+V(t,x,y) \leqslant -\lambda(t,y)C(W(x)), t \in (t_k, t_{k+1}), x, y \in S(\rho)$,

其中 $C \in K, W \in C[R^n, R_+], \lambda : R_+ \times R^m \to R_+$, 且只要 $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} [\alpha_i, \beta_i], \alpha_i < \beta_i < \alpha_{i+1}, \beta_i - \alpha_i \geqslant \beta > 0$ (β 是任一正数) 就有 $\int_I \lambda(s,y) = \infty$.;

(v) $W(x)$ 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件， $W(x) \geqslant d(\|x\|), x \in S(\rho)$, 其中 $d \in K$, 且对任一有间断点 $t_i, i = 1, 2, \cdots$ 的分段连续函数 $z(t)$, 当 $z(t) \in S(\rho)$ 时有

$$\int_0^t [D^+W(z(s))]_+ ds \ \text{（或者} \int_0^t [D^+W(z(s))]_- ds)$$

在 R_+ 上一致连续，其中 $[\cdot]_+$ (或者 $[\cdot]_-$) 指函数在 $s \in R_+$ 上的正部 (或负部), 又在 $S(\rho)$ 上有

$$W(x + I_k(x)) \leqslant W(x) \qquad (\text{或者 } W(x + I_k(x)) \geqslant W(x)),$$

则系统 (3.6.1) 的零解是渐近稳定的.

定理 3.6.5 的证明参考文献 [26]. □

定理 3.6.6 假定定理 3.6.3 的所有条件都成立且进一步假设

(iv*) 存在常数 $c>0$ 使得当 $z\in(0,c)$ 时，有

$$-\int_{t_{k-1}}^{t_k}\lambda(s,y)ds+\int_z^{\psi(z)}\frac{ds}{C(s)}\leqslant-\gamma_k,$$

其中 $\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k=\infty,\gamma_k\geqslant 0,k=1,2,\cdots,$

则系统 (3.6.1) 的零解是渐近稳定的.

推论 3.6.4 假定定理 3.6.4 中条件 (i)~(iv) 成立，进一步设对 $t\geqslant t_0$, 有

$$\limsup_{k\to\infty}\left[d_1\cdots d_k\exp\left(\int_{t_0}^{t_{k+1}}|p(s,y)|ds\right)\right]<+\infty,$$

则系统 (3.6.1) 的零解是一致稳定的.

定理 3.6.7 假定定理 3.6.4 中条件 (i)~(iv) 成立，且又有

$$\limsup_{k\to\infty}\left[d_1\cdots d_k\exp\left(\int_{t_0}^{t_{k+1}}|p(s,y)|ds\right)\right]=0, \tag{3.6.24}$$

则系统 (3.6.1) 的零解是渐近稳定的.

定理 3.6.6 和定理 3.6.7 的证明从略.

例 3.6.2 考虑脉冲微分系统

$$\begin{cases}x'=\dfrac{3}{4}t^{\frac{1}{2}}\sin x_k x, & t\in[k,k+1],\\ \Delta x=(-1+e^{-k})x, & t=k,\\ x(0^+)=x_0,\end{cases} \tag{3.6.25}$$

其中 $x_k=x(t_k)$. 令 $V(x)=x^2$, 则有

$$V'_{(3.6.25)}=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\sin x_k x^2=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\sin x_k V(x),\qquad t\in(k,k+1),$$

且

$$V(x+I_k(x))=e^{-2k}x^2=e^{-2k}V(x),\qquad t=k.$$

令 $p(t,y)=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\sin y,t\in(k,k+1),d_k=e^{-2k},k=1,2,\cdots.$

易证定理 3.6.7 的条件 (i)~(iv) 成立，进一步有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\left[d_1\cdots d_k\exp\left(\int_0^{k+1}p(s,y)ds\right)\right]\\
=&\lim_{k\to\infty}\left[e^{-2\times1}e^{-2\times2}\cdots e^{-2k}\exp\left(\int_0^1\frac{3}{2}s^{\frac{1}{2}}\sin xds\right)\cdots\exp\left(\int_k^{k+1}\frac{3}{2}s^{\frac{1}{2}}\sin xds\right)\right]\\
\leqslant&\lim_{k\to\infty}\left[e^{-k(k+1)}\exp\left(\int_0^{k+1}\frac{3}{2}s^{\frac{1}{2}}ds\right)\right]\\
=&\lim_{k\to\infty}e^{(k+1)(-k+(k+1)^{\frac{1}{2}})}\\
=&\,0,
\end{aligned}
$$

即定理 3.6.7 中 (3.6.24) 成立. 由定理 3.6.7 可得系统 (3.6.25) 的零解是渐近稳定的.

下面给出脉冲混合微分系统关于两个测度的稳定性的比较结果

定义 3.6.6　称 h_0 比 h 好，如果存在常数 $\delta>0$, 函数 $\psi\in K$, 使得 $h_0(x)<\delta$ 时，有$h(x)<\psi(h_0(x))$.

定义 3.6.7　设 $h_0,h\in\varGamma,x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 为系统 (3.6.1) 的任意解，则系统 (3.6.1) 称为：

(i) (h_0,h) 稳定：如果对 $\forall\varepsilon>0,\forall t_0\in R_+$, 存在常数 $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)>0$, 满足 $h_0(x_0)<\delta$ 时，有$h(x(t))<\varepsilon,t\geqslant t_0$;

(ii) (h_0,h) 吸引：如果对 $\forall\varepsilon>0,\forall t_0\in R_+$, 存在正常数 $\delta_0=\delta_0(t_0)$ 及 $T=T(t_0,\varepsilon)$, 满足 $h_0(x_0)<\delta_0$ 时，有$h(x(t))<\varepsilon,t\geqslant t_0+T$;

(iii) (h_0,h) 渐近稳定：如果 (i) 和 (ii) 同时成立.

定理 3.6.8　假定

(i) $h_0,h\in\varGamma,h_0$ 比 h 好;

(ii) 对 $\forall\eta>0$, 存在 $V_\eta\in C[S(h,\rho)\cap S^c(h_0,\eta),R_+],V_\eta$ 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件，且

(A) $b(h(x))\leqslant V_\eta(x)\leqslant a(h_0(x)),x\in S(h,\rho)\cap S^c(h_0,\eta),a,b\in K$;

(B) $D^+V_\eta(t,x,y)\leqslant g(t,V_\eta(x),\sigma_k(V_\eta(y))),t\in(t_k,t_{k+1}),x\in S(h,\rho)\cap S^c(h_0,\eta)$, $y\in S(h,\rho)$;

(C) $V_\eta(x+I_k(x))\leqslant\psi_k(V_\eta(x)),x\in S(h,\rho),k=1,2,\cdots$,

其中 $\sigma_k\in C[R_+,R_+],g\in C[R_+^3,R],\psi_k\in C[R_+,R_+],\psi_k$ 不减;

(iii) 存在 $0<\rho_0<\rho$, 满足当 $x\in S(h,\rho_0)$ 时，$x+I_k(x)\in S(h,\rho)$;

(iv) 对 $\forall\beta>0$, 存在 $\beta>\alpha>0$, 使得当 $h_0(x)<\alpha$ 时，$h_0(x+I_k(x))<\beta$,

则由系统 (3.6.4) 零解稳定得到系统 (3.6.1) 是 (h_0,h) 稳定的.

证明 由 (i), 存在常数 $\delta_0 > 0$, 函数 $\varphi \in K$, 满足当 $h_0(x) < \delta_0$ 时，有

$$h(x) < \varphi(h_0(x)). \tag{3.6.26}$$

$\forall \varepsilon \in (0, \rho_0)$. 由系统 (3.6.4) 的零解稳定知，对 $b(\varepsilon) > 0$, 存在常数 $\delta_1 = \delta_1(t_0, \varepsilon) > 0$, 满足当 $u_0 < \delta_1$ 时，有

$$u(t, t_0, u_0) < b(\varepsilon), \qquad t \geqslant t_0. \tag{3.6.27}$$

由 a, φ 的定义知，存在常数 $\delta_2 > 0, \delta_3 > 0$, 满足

$$\varphi(\delta_2) < \varepsilon, \qquad a(\delta_3) < \delta_1. \tag{3.6.28}$$

由 (iv), 对 $\delta_3 > 0$, 存在 $0 < \delta_4 < \delta_3$, 满足当 $h_0(x) < \delta_4$ 时，有

$$h_0(x + I_k(x)) < \delta_3. \tag{3.6.29}$$

取 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_2, \delta_4\}$. 令 $h_0(x_0) < \delta$, 得 $h(x_0) < \varepsilon$.

下证：$h(x(t)) < \varepsilon, t \geqslant t_0$, 其中 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 为系统 (3.6.1) 满足 $h_0(x_0) < \delta$ 的任意解.

否则，存在系统 (3.6.1) 满足 $h_0(x_0) < \delta$ 的解 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 及 $t_0 < t^* < \widetilde{t}^*$, 其中 $t_n < t^* \leqslant t_{n+1}, t_m < \widetilde{t}^* \leqslant t_{m+1}, n, m \in N, n < m$, 使得

$$\begin{aligned} &\delta \leqslant h_0(x(t^*)),\ h_0(x(t)) < \delta, \qquad t \in [t_0, t_n], \\ &\varepsilon \leqslant h(x(\widetilde{t}^*)),\ \ h(x(t)) < \varepsilon, \qquad t \in [t_0, t_m]. \end{aligned}$$

由 $\delta \in (0, \delta_4), \varepsilon \in (0, \rho_0)$ 及 (iii), (3.6.28) 得

$$h_0(x_n + I_n(x_n)) < \delta_3, \qquad h(x_m + I_m(x_m)) < \rho.$$

由此可找到 $t^0, \widetilde{t}^0$ 满足

$$\begin{aligned} &t_n < t^0 < t^*, \qquad t_m < \widetilde{t}^0 < \widetilde{t}^*, \qquad t^0 < \widetilde{t}^0, \\ &\delta \leqslant h_0(x(t^0)) < \delta_3,\ h_0(x(t)) < \delta_3, \qquad t \in [t_0, t^0], \\ &\varepsilon \leqslant h(x(\widetilde{t}^0)) < \rho,\ h(x(t)) < \rho, \qquad t \in [t_0, \widetilde{t}^0], \\ &\delta \leqslant h_0(x(t)), \qquad t \in [t^0, \widetilde{t}^0]. \end{aligned}$$

于是有

$$x(t) \in S(h, \rho) \cap S^c(h_0, \delta), \qquad t \in [t^0, \widetilde{t}^0]. \tag{3.6.30}$$

取 $\eta = \delta$. 由 (ii) 知， V_η 满足 (A), (B), (C).

由引理 3.6.1 得

$$V_\eta(x(t)) \leqslant \gamma(t, t^0, u_0), \qquad t \in [t^0, \widetilde{t}^0],$$

其中 $\gamma(t, t^0, u_0)$ 为系统 (3.6.4) 的最大解.

再由 $u_0 = V_\eta(x(t^0)) \leqslant a(h_0(x(t^0))) < a(\delta_4) < \delta_1$ 及 (A), (3.6.27) 可知

$$b(\varepsilon) = b(h(x(\widetilde{t}^0))) \leqslant V_\eta \leqslant \gamma(t, t^0, u_0) < b(\varepsilon).$$

得矛盾. 所以系统 (3.6.1) 是 (h_0, h) 稳定的. □

推论 3.6.5 当 $g(t, V_\eta(x), \sigma_k(V_\eta(y))) = 0$ 时，结论仍成立.

定理 3.6.9 设定理 3.6.8 的条件成立，并将 (ii), (B) 加强为

(B*) 对 $\forall \eta > 0$, 存在常数 $\mu_\eta > 0$, 使得

$$D^+V_\eta(t, x, y) \leqslant -\mu_\eta, t \in [t_k, t_{k+1}], \qquad x \in S(h, \rho) \cap S^c(h_0, \eta), y \in S(h, \rho),$$

则系统 (3.6.1) 是 (h_0, h) 渐近稳定的.

下面研究系统 (3.6.1) 关于两个测度的最终一致稳定性

定义 3.6.8 设 $h_0, h \in \Gamma$, 称系统 (3.6.1) 是

(i) (h_0, h) 最终一致稳定：如果对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在常数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \tau = \tau(\varepsilon) > 0$, 当 $h_0(x_0) < \delta$ 时有 $h(x(t)) < \varepsilon, t \geqslant t_0 \geqslant \tau$, 其中 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 为系统 (3.6.1) 的任意解;

(ii) (h_0, h) 最终拟一致渐近稳定：如果对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在常数 $\delta_0 > 0, \tau_0 > 0, T = T(\varepsilon)$, 当 $h_0(x_0) < \delta_0$ 时，有 $h(x(t)) < \varepsilon, t \geqslant t_0 + T, t_0 \geqslant \tau_0$;

(iii) (h_0, h) 最终一致稳定：如果 (i) 和 (ii) 同时成立.

定理 3.6.10 假定

(i) $h_0, h \in \Gamma, h_0$ 比 h 好;

(ii) 存在 $0 < \rho_0 < \rho$, 使得当 $x \in S(h, \rho_0)$ 时， $x + I_k(x) \in S(h, \rho), k = 1, 2, \cdots$;

(iii) 对 $\forall \beta > 0$, 存在 $\beta > \alpha > 0$, 满足当 $h_0(x) < \alpha$ 时， $h_0(x + I_k(x)) < \beta, k = 1, 2, \cdots$;

(iv) $V \in C[R^n, R_+], V(x)$ 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件，存在函数 $a, b \in K$, 满足

$$b(h(x)) \leqslant V(x) \leqslant a(h_0(x)), \qquad x \in S(h, \rho) \cap S^c(h_0, r);$$

(v) $D^+(t, x, y) \leqslant g(t, V(x), \sigma_k(V(y))), t \in (t_k, t_{k+1}), t \geqslant \theta(r), y \in S(h, \rho), x \in S(h, \rho) \cap S^c(h_0, r)$, 其中 $\sigma_k \in C[R_+, R_+], g \in C[R_+^3, R_+], \theta \in L$;

(vi) 存在函数 $\psi_k \in C[R_+, R_+], \psi_k$ 不减，使得

$$V(x + I_k(x)) \leqslant \psi_k(V(x)), \qquad x \in S(h, \rho),$$

则由系统 (3.6.4) 的零解 $u=0$ 是最终一致稳定的可知系统 (3.6.1) 是 (h_0,h) 最终一致稳定的.

证明 由 (i), 存在函数 $\varphi\in K$. 常数 $\delta_1>0$, 使当 $h_0(x)<\delta_1$ 时有

$$h(x)\leqslant\varphi(h_0(x)). \tag{3.6.31}$$

由 $u=0$ 是最终一致稳定知，对 $\forall\varepsilon\in(0,\rho_0)$, 存在正常数 $\bar\delta=\bar\delta(\varepsilon),\bar\tau=\bar\tau(\varepsilon)$, 使 $u_0\leqslant\bar\delta$ 时，有

$$u(t,t_0,x_0)<b(\varepsilon),\qquad t\geqslant t_0\geqslant\bar\tau. \tag{3.6.32}$$

由 a,φ 的定义知，存在常数 $\delta_2=\delta_2(\varepsilon),\delta_3=\delta_3(\varepsilon)$, 使得

$$a(\delta_2)<\bar\delta,\qquad\varphi(\delta_3)<\varepsilon. \tag{3.6.33}$$

由 (iii) 知，存在常数 $0<\delta_4<\delta_2$, 使当 $h_0(x)<\delta_4$ 时，有

$$h_0(x+I_k(x))<\delta_2. \tag{3.6.34}$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_3,\delta_4\},\tau=\max\{\bar\tau,\theta(\delta)\}$, 则当 $h_0(x_0)<\delta$ 时，有

$$h(x_0)<\varphi(h_0(x_0))<\varphi(\delta)<\varepsilon.$$

下证: $h(x(t))<\varepsilon,t\geqslant\tau_0\geqslant\tau(\varepsilon)$, 其中 $x(t)$ 为系统 (3.6.1) 的满足 $h_0(x_0)<\delta$ 的解.

否则, 存在满足 $h_0(x_0)<\delta$ 的 (1) 的解 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 及 $\tau(\varepsilon)\leqslant t_0<t^*\leqslant\widetilde{t}^*$, 其中 $t_n<t^*\leqslant t_{n+1},t_m<\widetilde{t}^*\leqslant t_{m+1},m,n\in N,n\leqslant m$, 满足

$$\delta\leqslant h_0(x(t^*)),\ h_0(x(t))<\delta,\qquad t\in[\tau_0,t_n];$$

$$\varepsilon\leqslant h(x(\widetilde{t}^*)),\ h(x(t))<\varepsilon,\qquad t\in[\tau_0,t_m].$$

由 $\delta\in(0,\delta_4),\varepsilon\in(0,\rho_0)$ 及 (ii), (iii) 知

$$h_0(x_n+I_n(x_n))<\delta_2,\qquad h(x_m+I_m(x_m))<\rho.$$

由此，可以找到满足 $t_n<t^0\leqslant t^*,t_m<\widetilde{t}^0<\widetilde{t}^*,t^0<\widetilde{t}^0$ 的 t^0 及 $\widetilde{t}^0$, 使得

$$\delta\leqslant h_0(x(t^0))<\delta_2,\ h_0(x(t))<\delta_2,\qquad t\in[t_0,t^0];$$

$$\varepsilon\leqslant h(x(\widetilde{t}^0))<\rho,\ h(x(t))<\rho,\qquad t\in[t_0,\widetilde{t}^0];$$

$$\delta\leqslant h_0(x(t)),\qquad t\in[t^0,\widetilde{t}^0].$$

于是

$$x(t) \in S(h,\rho) \cap S^c(h_0,\delta), \qquad t \in [t^0, \widetilde{t}^0]. \tag{3.6.35}$$

由 (v), (vi), (3.6.35) 及引理 3.6.1 知

$$V(x(t)) \leqslant \gamma(t, t^0, u_0), \qquad t \in [t^0, \widetilde{t}^0],$$

其中 $\gamma(t, t^0, u_0)$ 是系统 (3.6.4) 的最大解.

由 (3.6.34) 知

$$u_0 = V(x(t^0)) \leqslant u(h_0(x(t^0))) < a(\delta_2) < \bar{\delta}.$$

于是由 (3.6.34) 推出

$$b(\varepsilon) \leqslant b(h(x(\widetilde{t}^0))) \leqslant V(x(\widetilde{t}^0) \leqslant \gamma(\widetilde{t}^0, t^0, u_0) < b(\varepsilon).$$

得矛盾. 所以系统 (3.6.1) 是 (h_0, h) 最终一致稳定的. □

定理 3.6.11　假定定理 3.6.10 中除条件 (iii) 外都成立, 且有

(iii*) $h_0(x)$ 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件, 且对 $\forall\gamma > 0$, 存在 x_0, 使得当 $h_0(x_0) = \gamma$ 时, 有 $D_- h_0(x_0) < 0$; 又有 $h_0(x + I_k(x)) < h_0(x), k = 1, 2, \cdots$,
则由系统 (3.6.4) 的零解是最终一致渐近稳定得系统 (3.6.1) 是 (h_0, h) 最终一致渐近稳定的.

定理 3.6.12　假定定理 3.6.10 中条件 (i), (ii), (iii), (iv) 成立, 进一步有

(v*) $D^+V(t,x,y)|_{(3.6.1)} \leqslant 0, t \in [t_k, t_{k+1}], t \geqslant \theta(r), k = 1, 2, \cdots, x \in S(h,\rho) \cap S^c(h_0, r), y \in S(h,\rho)$, 其中 $\theta \in L$;

(vi*) $V(x + I_k(x)) \leqslant V(x), x \in S(h,\rho), k = 1, 2, \cdots$,

则摄动系统

$$\begin{cases} x' = f(t, x, x_k) + R(t, x, x_k), & t \in [t_k, t_{k+1}], \\ x(t_k^+) = x_k^+, x_k^+ = x_k + I_k(x_k), & k = 1, 2, \cdots, \\ x_k = x(t_k), I_0(x_0) \equiv 0, x(t_0^+) = x_0 \end{cases} \tag{3.6.36}$$

是 (h_0, h) 最终一致稳定的, 其中 $R \in C[R_+ \times R^n \times R^m, R^n]$. 且有

$$\int_0^\infty \varphi(s)ds < \infty, \varphi(t) = \max_{x,y \in S(h,\rho)} \|R(t,x,y)\|.$$

证明　由 (i). 存在 $\sigma_0 > 0, \varphi \in K$, 使当 $h_0(x) < \sigma_0$ 时, 有

$$h(x) \leqslant \psi(h_0(x)). \tag{3.6.37}$$

对 $\varepsilon \in (0, \rho_0)$. 由 a, φ 的定义知, 存在正常数 $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon), \delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$ 满足

$$\varphi(\delta_1) < \varepsilon, \qquad 2a(\delta_2) < b(\varepsilon). \tag{3.6.38}$$

由 (iii) 知，存在 $\delta_2 > \delta_3 > 0$, 使当 $h_0(x) < \delta_3$ 时，有

$$h_0(x + I_k(x)) < \delta_2. \tag{3.6.39}$$

取 $\delta = \min\{\sigma_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}, \tau_1(\varepsilon) = \theta(\delta(\varepsilon))$. 由 $\int_0^\infty \varphi(s)ds < \infty$ 知，存在 $\tau_2(\varepsilon) > 0$, 使当 $t_0 \geqslant \tau_2(\varepsilon)$ 时，有

$$\int_{t_0}^\infty \varphi(s)ds < \frac{a(\delta)}{L}. \tag{3.6.40}$$

令 $\tau = \tau(\varepsilon) = \max\{\tau_1(\varepsilon), \tau_2(\varepsilon)\}$. 则由 $h_0(x_0) < \delta$ 知

$$h(x_0) \leqslant \varphi(h_0(x_0)) < \varphi(\delta) < \varepsilon.$$

下证：$h(x(t)) < \varepsilon, t \geqslant t_0 \geqslant \tau$. 其中 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 为系统 (3.6.36) 的满足 $h_0(x_0) < \delta$ 的解.

否则，存在满足 $h_0(x_0) < \delta$ 的系统 (3.6.36) 的解 $x(t)$ 及 $\tau(\varepsilon) \leqslant t_0 < t^* \leqslant \widetilde{t}^*$, 其中 $t_n < t^* \leqslant t_{n+1}$, $t_m < \widetilde{t}^* \leqslant t_{m+1}$, $m, n \in N, n \leqslant m$, 满足

$$\begin{aligned} &\delta \leqslant h_0(x(t^*)), h_0(x(t)) < \delta, && t \in [t_0, t_n], \\ &\varepsilon \leqslant h(x(\widetilde{t}^*)), h(x(t)) < \varepsilon, && t \in [t_0, t_m]. \end{aligned}$$

由 $\delta \in (0, \delta_3), \varepsilon \in (0, \rho_0)$ 及 (ii), (iii) 知

$$h_0(x_n + I_n(x_n)) < \delta_2, \qquad h(x_m + I_m(x_m)) < \rho.$$

由此可找到满足 $t_n < t^0 < t^*, t_m < \widetilde{t}^0 < \widetilde{t}^*, t^0 < \widetilde{t}^0$, 使得

$$\begin{aligned} &\delta \leqslant h_0(x(t^0)) < \delta_2, \quad h_0(x(t)) < \delta_2, && t \in [t_0, t^0]; \\ &\varepsilon \leqslant h(x(\widetilde{t}^*)) < \rho, \quad h(x(t)) < \rho, && t \in [t_0, \widetilde{t}^0]; \\ &\delta \leqslant h_0(x(t)), && t \in [t^0, \widetilde{t}^0]. \end{aligned}$$

于是

$$x(t) \in S(h, \rho) \cap S^c(h_0, \delta), \qquad t \in [t^0, \widetilde{t}^0]. \tag{3.6.41}$$

由 (v*) 知

$$D^+V(t, x, y)_{(3.6.36)} \leqslant L\varphi(t).$$

结合 (vi*) 得

$$V(x(\widetilde{t}^0)) \leqslant V(x(t^0)) + L\int_{t^0}^{\widetilde{t}^0} \varphi(s)ds. \tag{3.6.42}$$

所以

$$
\begin{aligned}
b(\varepsilon) &\leqslant b(h(x(\tilde{t}^0))) \leqslant V(x(\tilde{t}^0)) \leqslant V(x(t^0)) + L\frac{a(\delta)}{L} \\
&\leqslant a(h_0(x(t^0))) + a(\delta) \leqslant 2a(\delta) < b(\varepsilon),
\end{aligned}
$$

得矛盾. 故系统 (3.6.36) 是 (h_0, h) 最终一致稳定的. □

例 3.6.3 考虑脉冲混合微分系统:

$$
\begin{cases}
x' = -y + (1 - x_k^2 - y_k^2)x\exp\left(t - \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}\right), & t \in [t_k, t_{k+1}], \\
y' = x + (1 - x_k^2 - y_k^2)y\exp\left(t - \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}\right), & t \in [t_k.t_{k+1}], \\
x_k = x(t_k), \quad x_k^+ = x_k + y_k, \\
y_k = y(t_k), \quad y_k^+ = x_k - y_k
\end{cases}
\tag{3.6.43}
$$

及摄动系统

$$
\begin{cases}
x' = -y + (1 - x_k^2 - y_k^2)x\exp\left(t - \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}\right) \\
\qquad +R_1(t, x, y, x_k, y_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \\
y' = x + (1 - x_k^2 - y_k^2)y\exp\left(t - \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}\right) \\
\qquad +R_2(t, x, y, x_k, y_k), \quad t \in [t_k.t_{k+1}], \\
x_k = x(t_k), \quad x_k^+ = x_k + y_k, \\
y_k = y(t_k), \quad y_k^+ = x_k - y_k,
\end{cases}
\tag{3.6.44}
$$

其中 $R_1(t, x, y, x_k, y_k) = R_2(t, x, y, x_k, y_k) = (x_k^2 + y_k^2 - 1)t\exp(-t)$.

令 $V(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$, $h_0(x, y) = h(x, y) = |x^2 + y^2 - 1|$, 则对于 $0 < r \leqslant 1 - x^2 - y^2 < \dfrac{2}{3}$, $\theta(r) = \dfrac{1}{r}$, 有

$$
h^2(x, y) \leqslant V(x, y) \leqslant h_0^2(x, y), \qquad (x, y) \in R^2;
$$

$$
\begin{aligned}
&D^+V(t, x, y, x_k, y_k)|_{(3.6.43)} \\
&= 4(x^2 + y^2 - 1)(xx\prime + yy\prime) \\
&= 4(x^2 + y^2 - 1)(1 - x_k^2 - y_k^2)(x^2 + y^2)\exp\left(t - \frac{1}{1 - x^2 - y^2}\right) \leqslant 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&V(x_k + I_k(x_k), y_k + I_k(x_k)) \\
&= \left[(x_k + y_k)^2 + (x_k - y_k)^2 - 1\right]^2 \leqslant V(x_k, y_k).
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&\|(R_1(t,x,y,x_k,y_k),R_2(t,x,y,x_k,y_k))\|\\=&\sqrt{2}(x_k^2+y_k^2-1)^2 t\exp(-t)\\\leqslant&\frac{4\sqrt{2}}{9}t\exp(-t).\\&\int_{t_0}^{\infty}\frac{4\sqrt{2}}{9}t\exp(-t)<\infty.\end{aligned}$$

所以由定理 3.6.12 知摄动系统 (3.6.44) 是 (h_0,h) 最终一致稳定的.

下面研究系统 (3.6.1) 的 (h_0,h) 实际稳定性.

定义 3.6.9 $h_0,h\in\Gamma$, 系统 (3.6.1) 被称为:

(i) (h_0,h) 实际稳定，如果对给定满足 $0<\lambda<A$ 的 (λ,A), 当 $h_0(x_0)<\lambda$ 时有 $h(x(t))<A, t\geqslant t_0$ 对某些 $t_0\in R_+$ 成立，其中 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 是系统 (3.6.1) 的任一解;

(ii) (h_0,h) 一致实际稳定，如果 (i) 对所有的 $t_0\in R_+$ 都成立;

(iii) (h_0,h) 实际渐近稳定，如果 (i) 成立，同时，对任意 $t_0\in R_+$, 都存在 $T=T(t_0,\varepsilon)>0$ 使得当 $h_0(x_0)<\lambda$ 时有 $h(x(t))<\varepsilon, t\geqslant t_0+T$;

(iv) (h_0,h) 一致实际渐近稳定，如果 (ii) 成立，同时， (iii) 中的 T 与 t_0 无关.

定理 3.6.13 假定

(i) $0<\lambda<A$;

(ii) $h_0,h\in\Gamma$, 存在$\phi\in K$ 使得$h(x)\leqslant\phi(h_0(x))$, $h_0(x)<\lambda$;

(iii) $V\in v_0$, 存在 $a\in K, b\in KR$ 使得

$$b(h(x))\leqslant V(x)\leqslant a(h_0(x)),\qquad x\in S(h,A);$$

(iv) $D^+V(t,x,y)\leqslant 0,\ t\neq t_k, x\in S(h,A)$;

(v) $V(x+I_k(x))\leqslant V(x),\ x\in S(h,A), k=1,2,\cdots$;

(vi) $h(x+I_k(x))\leqslant h(x),\ x\in S(h,A), k=1,2,\cdots$;

(vii) $\phi(\lambda)<A,\ a(\lambda)<b(A)$,

则系统 (1) 关于 (λ,A) 是 (h_0,h) 一致实际稳定的.

证明 对任意 $t_0\in R_+$, 令 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 是系统 (3.6.1) 的满足 $h_0(x_0)<\lambda$ 的任一解，则由 (i), (ii) 得

$$h(x_0)\leqslant\phi(h_0(x_0))<\phi(\lambda)<A.$$

下面证明当 $h(x_0)<\lambda$ 时有

$$h(x(t))<A,\qquad t\geqslant t_0. \tag{3.6.45}$$

反证：若 (3.6.45) 不成立，则由 (vi) 知存在系统 (3.6.1) 的满足 $h_0(x_0)<\lambda$ 的解 $x(t)$, 存在 $t^*\in(t_n,t_{n+1}]$, $n\in\{1,2,\cdots\}$ 使得

$$h(x(t^*))=A,\ x(t)\in S(h,A),\qquad t\in[t_0,t^*). \tag{3.6.46}$$

令 $m(t)=V(x(t))$, $t\in[t_0,t^*)$, 则由 (iv),(v) 得

$$m(t^*)\leqslant m(t_n^+)\leqslant m(t_n)\leqslant\cdots\leqslant m(t_0^+). \tag{3.6.47}$$

由于 (iii),(vii)(3.6.46) 和 (3.6.47), 推知

$$b(A)=b(h(x(t^*)))\leqslant m(t^*)\leqslant m(t_0^+)\leqslant a(h_0(x_0))<a(\lambda)<b(A),$$

得到矛盾．故 (3.6.45) 成立，因而结论成立． □

定理 3.6.14　假定定理 3.6.13 中的所有条件都成立，且进一步假设：

(iv)* $D^+V(t,x,y)\leqslant -C(V(x)),t\neq t_k,x\in S(h,A),C\in K$,

则系统 (3.6.1) 是 (h_0,h) 一致实际渐近稳定的．

证明　(I) 由定理 3.6.13 知系统 (3.6.1) 是 (h_0,h) 一致实际稳定的，故对任意 $t_0\in R_+$, 当$h(x_0)<\lambda$ 时有$x(t)\in S(h,A),t\geqslant t_0$.

(II) 对任意 $\varepsilon\in(0,\lambda)$, 令$T=T(\varepsilon)=\dfrac{a(\lambda)}{C(b(\varepsilon))}>0$.

首先，证明存在 $t^*\in[t_0,t_0+T]:t_i<t^*\leqslant t_{i+1},i\in\{1,2,\cdots\}$ 使得

$$m(t^*)<b(\varepsilon). \tag{3.6.48}$$

若 (3.6.48) 不成立，则 $m(t)\geqslant b(\varepsilon),t\in[t_0,t_0+T]$, 假设 $t_1,t_2,\cdots,t_p\in[t_0,t_0+T]$, 利用 (v), (iv)* 得

$$\begin{aligned}
&m(t_0+T)-m(t_0^+)\\
=&[m(t_0+T)-m(t_p)]+[m(t_p)-m(t_{p-1})]+\cdots+\\
&[m(t_2)-m(t_1)]+[m(t_1)-m(t_0^+)]\\
\leqslant&[m(t_0+T)-m(t_p^+)]+[m(t_p)-m(t_{p-1}^+)]+\cdots+\\
&[m(t_2)-m(t_1^+)]+[m(t_1)-m({t_0}^+)]\\
\leqslant&\int_{t_p^+}^{t_0+T}D^+V(t,x(t),x_p)dt+\int_{t_{p-1}^+}^{t_P}D^+V(t,x(t),x_{p-1})dt+\cdots\\
&+\int_{t_1^+}^{t_2}D^+V(t,x(t),x_1)dt+\int_{t_0^+}^{t_1}D^+V(t,x(t),x_0)dt\\
\leqslant&-C(b(\varepsilon))T,
\end{aligned} \tag{3.6.49}$$

进而

$$-a(\lambda) \leqslant -m(t_0^+) \leqslant m(t_0+T) - m(t_0^+) \leqslant -C(b(\varepsilon))T < -a(\lambda) - 1,$$

于是得到矛盾. 因此 (3.6.48) 成立.

其次, 若 $t \geqslant t^*$, 由 (iii), (iv)*, (v) 和 (3.6.48) 推知

$$b(h(x(t))) \leqslant m(t) \leqslant m(t^*) < b(\varepsilon), \qquad t \geqslant t^*.$$

所以

$$h(x(t)) < \varepsilon, \qquad t \geqslant t_0 + T.$$

从而由 (I), (II) 知道系统 (3.6.1) 是 (h_0, h) 一致实际渐近稳定的. □

以上的定理中要求 V 函数沿系统 (3.6.1) 的解单调递减, 而下面的定理 3.6.15 和定理 3.6.16 不再要求 V 函数沿系统 (3.6.1) 的解单调递减.

定理 3.6.15 假定

(i) $0 < \lambda < A < A_0$;

(ii) $h_0, h \in \Gamma$, 存在 $\phi \in K$ 使得 $h(x) \leqslant \phi(h_0(x)), h_0(x) < \lambda$;

(iii) $V \in v_0$, 存在 $a \in K, b \in KR$ 使得

$$b(h(x)) \leqslant V(x) \leqslant a(h_0(x)), \qquad x \in S(h, A_0);$$

(iv) 存在 $C \in K$ 和可测函数 $\lambda : R_+ \times R^n \to R_+$ 使得

$$D^+V(t,x,y) \leqslant -\lambda(t,y)C(V(x)), \qquad t \neq t_k, y \in S(h, A_0);$$

(v) $V(x + I_k(x)) \leqslant \psi_k(V(x)), \psi_k \in K, k = 1, 2, 3, \cdots$;

(vi) 存在常数 $c > b(A)$, 使得对任意 $z \in (0, c)$ 有

$$-\int_{t_{k-1}}^{t_k} \lambda(s,y)ds + \int_z^{\psi_k(z)} \frac{ds}{C(s)} \leqslant 0, \qquad y \in S(h, A_0);$$

(vii) $\phi(\lambda) < A, \qquad a(\lambda) < b(A)$;

(viii) 若 $x \in S(h, A)$ 时有 $x + I_k(x) \in S(h, A_0)$,

则系统 (3.6.1) 关于 (λ, A) 是 (h_0, h) 一致实际稳定的.

证明 对任意 $t_0 \in R_+$, 令 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 是系统 (3.6.1) 的满足 $h_0(x_0) < \lambda$ 的任意解, 则 $h(x_0) \leqslant \phi(h_0(x_0)) < \phi(\lambda) < A$.

下证: 当 $h(x_0) < \lambda$ 时有

$$h(x(t)) < A, \qquad t \geqslant t_0. \tag{3.6.50}$$

反证: 若 (3.6.50) 不成立, 则由 (iv), (viii) 知存在系统 (3.6.1) 的满足 $h_0(x_0) < \lambda$ 的解 $x(t)$, 存在 $\tilde{t} > t_0 : t_n \leqslant \tilde{t} < t_{n+1}, n \in \{1, 2, \cdots\}$, 使得

$$A \leqslant h(x(\tilde{t}^+)) < A_0, h(x(\tilde{t})) \leqslant A \text{ 且} x(t) \in S(h, A_0), \qquad t \in [t_0, \tilde{t}].$$

由 (viii) 知存在 $t^* \in [\tilde{t}, t_{n+1}) \subseteq [t_n, t_{n+1})$ 使得

$$A \leqslant h(x(t^*)) < A_0 \text{ 且 } x(t) \in S(h, A_0), \qquad t \in [t_0, t^*]. \tag{3.6.51}$$

令 $m(t) = V(x(t)), m_k = m(t_k), m_k^+ = m(t_k^+)$, 由 (iii), (iv) 和 (vii) 得到

$$m_1 \leqslant m(t_0^+) \leqslant a(h_0(x_0)) < a(\lambda) < b(A) < c. \tag{3.6.52}$$

假设 $m_k \leqslant m_{k-1}^+ < b(A) < c, k = 1, 2, 3, \cdots$,
由 (iv), (v) 得

$$\int_{m_{k-1}^+}^{m_k} \frac{ds}{C(s)} \leqslant -\int_{t_{k-1}}^{t_k} \lambda(s, y) ds \tag{3.6.53}$$

和

$$\int_{m_k}^{m_k^+} \frac{ds}{C(s)} \leqslant \int_{m_k}^{\psi_k(m_k)} \frac{ds}{C(s)}. \tag{3.6.54}$$

由 (vi),(3.6.53) 和 (3.6.54) 得到

$$\int_{m_{k-1}^+}^{m_k^+} \frac{ds}{C(s)} \leqslant 0,$$

即

$$m_k^+ \leqslant m_{k-1}^+, \qquad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.6.55}$$

于是由 (iii), (iv), (3.6.51), (3.6.52) 和 (3.6.55) 有

$$b(A) \leqslant b(h(x(t^*))) \leqslant m(t^*) \leqslant m(t_n^+) \leqslant m(t_{n-1}^+) \leqslant \cdots \leqslant m(t_0^+) < b(A),$$

得矛盾. 故 (3.6.50) 成立. □

定理 3.6.16　假定定理 3.6.15 中的所有条件都成立, 且进一步修改条件 (vi) 为

(vi) * 存在常数 $c > b(A)$, 对于任意 $z \in (0, c)$ 使得

$$-\int_{t_{k-1}}^{t_k} \lambda(s) ds + \int_z^{\psi_k(z)} \frac{ds}{C(s)} \leqslant -\gamma_k,$$

其中 $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \infty, \gamma_k \geqslant 0, k = 1, 2, \cdots$,
则系统 (3.6.1) 关于 (λ, A) 是 (h_0, h) 一致实际渐近稳定的.

证明 (I) 由定理 3.6.15 知系统 (3.6.1) 是 (h_0, h) 一致实际稳定的，故对任意 $t_0 \in R_+$, 当$h(x_0) < \lambda$ 时有$x(t) \in S(h, A), t \geqslant t_0$.

(II) 令 $m(t) = V(x(t)), m_k^+ = m(t_k^+)$.

下证：

$$\lim_{k \to \infty} m_k^+ = 0.$$

否则，存在 $\beta > 0$ 和一个正整数 j, 使得 $m_k^+ \geqslant \beta, k \geqslant j$. 因此，由 (3.6.55) 得

$$C(\beta) \leqslant C(m_k^+) \leqslant C(m_{k-1}^+) \leqslant \cdots \leqslant C(m_0^+) < C(b(A)). \tag{3.6.56}$$

由 (3.6.53), (3.6.54) 和 (vi)*, 得

$$\int_{m_{k-1}^+}^{m_k^+} \frac{ds}{C(s)} \leqslant -\gamma_k. \tag{3.6.57}$$

由 (3.6.56) 和 (3.6.57) 得

$$\gamma_k \leqslant \int_{m_k^+}^{m_{k-1}^+} \frac{ds}{C(s)} \leqslant \frac{m_{k-1}^+ - m_k^+}{C(\beta)},$$

即

$$m_k^+ \leqslant m_{k-1}^+ - \gamma_k C(\beta). \tag{3.6.58}$$

由 (3.6.58) 递推得

$$m_{j+n}^+ \leqslant m_j^+ - C(\beta) \sum_{k=j+1}^{j+n} \gamma_k,$$

从而

$$\lim_{n \to +\infty} m_{j+n}^+ = -\infty,$$

得矛盾．所以，$\lim\limits_{k \to \infty} m_k^+ = 0$.

因此，对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使 $m(t_k^+) < b(\varepsilon), k \geqslant N$. 取 $T = t_N - t_0$, 则对 $t \geqslant t_0 + T$ 有 $b(h(x(t))) \leqslant m(t) \leqslant m_k^+ < b(\varepsilon)$, 即

$$h(x(t)) < \varepsilon, \qquad t \geqslant t_0 + T.$$

由 (I), (II) 知系统 (3.6.1) 关于 (λ, A) 是 (h_0, h) 一致实际渐近稳定的． □

下面的定理是借助比较定理得到的比较结果．

定理 3.6.17 假定

(i) $0 < \lambda < A$;

(ii) $h_0, h \in \Gamma$, 存在 $\phi \in K$ 使 $h(x) \leqslant \phi(h_0(x)), h_0(x) < \lambda$;

(iii) $V \in v_0$, 存在 $a, b \in K$, 使得

$$b(h(x)) \leqslant V(x), \qquad h(x) < A,$$

$$V(x) \leqslant a(h_0(x)), \qquad h_0(x) < \lambda;$$

(iv) V 函数满足

$$\begin{aligned} &D^+V(t,x,y) \leqslant g(t,V(x),\sigma_k(V(y))), && t \in (t_k, t_{k+1}), x, y \in S(h,A), \\ &V(x+I_k(x)) \leqslant \psi_k(V(x)), && h(x) < A, \qquad k = 1, 2, \cdots, \end{aligned}$$

其中 $g \in C[R_+^2, R_+]$ 且 $\psi_k \in C[R_+, R_+], k = 1, 2, \cdots, \psi_k(r)$ 关于 r 单调非减;

(v) $h(x + I_k(x)) \leqslant h(x), k = 1, 2, \cdots$;

(vi) $\phi(\lambda) < A, a(\lambda) < b(A)$,

则由系统 (3.6.4) 的零解关于 $(a(\lambda), b(A))$ 的实际 (渐近) 稳定性得到系统 (3.6.1) 的相应的关于 (λ, A) 的 (h_0, h) 实际 (渐近) 稳定性.

证明　(I) 假设系统 (3.6.4) 的零解关于 $(a(\lambda), b(A))$ 实际稳定, 即当 $u_0 < a(\lambda)$ 时, 对某些 $t_0 \in R_+$ 有

$$u(t, t_0, u_0) < b(A), \qquad t \geqslant t_0. \tag{3.6.59}$$

对于上述 $t_0 \in R_+$, 由 (ii) 和 (vi) 知, 当 $h_0(x_0) < \lambda$ 时有 $h(x_0) \leqslant \phi(h_0(x_0)) < \phi(\lambda) < A$.

下证:

$$h(x(t)) < A, \qquad t \geqslant t_0, \tag{3.6.60}$$

其中 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 是系统 (3.6.1) 的任意满足 $h_0(x_0) < \lambda$ 解. 若不然, 则由 (vi) 知存在 $t^* > t_0$ 使得

$$h(x(t^*)) = A, \text{ 且} x(t) \in S(h, A), \qquad t \in [t_0, t^*).$$

由 (iv) 和引理 3.6.1 得

$$V(x(t)) \leqslant r(t, t_0, u_0), \qquad t \in [t_0, t^*], \tag{3.6.61}$$

其中 $u_0 = V(x_0), r(t, t_0, u_0)$ 是系统 (3.6.4) 的最大解. 因为 $u_0 = V(x_0) \leqslant a(h_0(x_0)) < a(\lambda)$, 由 (iii), (3.6.59) 和 (3.6.61) 有

$$b(A) = b(h(x(t^*))) \leqslant V(x(t^*)) \leqslant r(t^*, t_0, u_0) < b(A),$$

得矛盾. 所以 $h(x(t)) < A, t \geqslant t_0$, 即系统 (3.6.1) 关于 (λ, A) 是 (h_0, h) 实际稳定的.

(II) 假设系统 (3.6.4) 的零解关于 $(a(\lambda), b(A))$ 一致实际稳定，则 (3.6.59) 对所有 $t_0 \in R_+$ 成立，从而 (3.6.60) 对所有 $t_0 \in R_+$ 成立.

(III) 假设系统 (3.6.4) 的零解关于 $(a(\lambda), b(A))$ 实际渐近稳定，首先，由 (I) 知对某些 $t_0 \in R_+$ 有 $h_0(x_0) < \lambda$ 时

$$x(t) \in S(h, A), \qquad t \geqslant t_0. \tag{3.6.62}$$

其次，对 $b(\varepsilon) > 0$, 存在 $T = T(t_0, \varepsilon) > 0$ 使得当 $u_0 < a(\lambda)$ 时有

$$u(t, t_0, u_0) < b(\varepsilon), \qquad t \geqslant t_0 + T. \tag{3.6.63}$$

因此，由 (3.6.62),(iii) 及 $u_0 = V(x_0) \leqslant a(h_0(x_0)) < a(\lambda)$ 得

$$b(h(x(t))) \leqslant V(x(t)) \leqslant u(t, t_0, u_0) < b(\varepsilon), \qquad t \geqslant t_0 + T.$$

所以

$$h(x(t)) \leqslant \varepsilon, \qquad t \geqslant t_0 + T. \tag{3.6.64}$$

由 (3.6.62) 及 (3.6.64) 知系统 (3.6.1) 关于 (λ, A) 是 (h_0, h) 实际渐近稳定的.

(IV) 假设系统 (3.6.4) 的零解关于 $(a(\lambda), b(A))$ 一致实际渐近稳定，则存在 $T = T(\varepsilon) > 0$ 使得 (3.6.64) 成立，从而系统 (3.6.1) 关于 (λ, A) 是 (h_0, h) 一致实际渐近稳定的. □

推论 3.6.6 在定理 3.6.17 中

(a) 若 $g(t, u, \sigma_k(u_k)) = \beta_k u_k$, $\psi_k(u) = (1 + d_k)u$, 且 $M_1 = \prod_{j=1}^{\infty}(1 + d_{j-1} + \beta_{j-1}(t_j - t_{j-1})) < \infty$, $b(A) > M_1 a(\lambda)$, 则系统 (3.6.1) 关于 (λ, A) 是 (h_0, h) 一致实际稳定的.

(b) 若 $g(t, u, \sigma_k(u_k)) = \alpha u + \beta_k u_k$, $\alpha \neq 0$, $\psi_k(u) = (1 + d_k)u$. 且 $M_2 = \prod_{j=1}^{\infty}[e^{\alpha(t_j - t_{j-1})} \cdot (1 + d_{j-1}) + \frac{\beta_{j-1}}{\alpha}(e^{\alpha(t_j - t_{j-1})} - 1)] < \infty$, $b(A) > M_2 a(\lambda)$, 则系统 (3.6.1) 关于 (λ, A) 是 (h_0, h) 一致实际稳定的.

证明 (I) 由条件 (a) 可得系统 (3.6.4) 的解表示为

$$u(t, t_0, u_0) = (1 + d_k + \beta_k(t - t_k)) \prod_{j=1}^{k} d_j[1 + d_{j-1} + \beta_{j-1}(t_j - t_{j-1})]u_0, \qquad t \in (t_k, t_{k+1}).$$

故 $u_0 < a(\lambda)$ 时 $u(t, t_0, u_0) < M_1 u_0 < M_1 a(\lambda) < b(A)$, 从而 (3.6.4) 的零解关于 $(a(\lambda), b(A))$ 一致实际稳定，由定理 3.6.17 知系统 (3.6.1) 关于 (λ, A) (h_0, h) 一致实际稳定.

(II) 由条件 (b) 可得系统 (3.6.4) 的解表示为

$$u(t,t_0,u_0)=[e^{\alpha(t-t_k)}(1+d_k)+\frac{\beta_k}{\alpha}(e^{\alpha(t-t_k)}-1)]\prod_{j=1}^{\infty}[e^{\alpha(t_j-t_{j-1})}(1+d_{j-1})$$
$$+\frac{\beta_{j-1}}{\alpha}(e^{\alpha(t_j-t_{j-1})}-1)]u_0,\qquad t\in(t_k,t_{k+1}).$$

其余类似 (I) 的证明. □

例 3.6.4

$$\begin{cases}x'=-x-y\sin x_k, & t\neq t_k,\\ y'=x\sin x_k-y, & t\neq t_k,\\ x_k^+=\dfrac{x}{k+1}, & t=t_k,\ k=0,1,2,\cdots,\\ y_k^+=\dfrac{y}{k+1}, & t=t_k,\ k=0,1,2,\cdots,\\ x(t_0^+)=x_0, & y(t_0^+)=y_0.\end{cases}\tag{3.6.65}$$

给定 $0<\lambda<A$, 令 $V(x,y)=x^2+y^2, h_0(x,y)=h(x,y)=V(x,y), C(r)=2r$, 则 $h(x,y)\leqslant V(x,y)\leqslant h_0(x,y), x,y\in R^n$, $D^+V(t,x,y,x_k,y_k)|_{(3.6.65)}=-2(x^2+y^2)=-2V(x,y)=-C(V(x,y))$, $V(x_k^+,y_k^+)=\dfrac{1}{(k+1)^2}V(x_k,y_k)\leqslant V(x_k,y_k)$. 由定理 3.6.14 知系统 (3.6.65) 关于 (λ,A) 是 (h_0,h) 一致实际渐近稳定的.

下面利用 Lyapunov 直接方法和比较方法得到系统 (3.6.1) 的关于两个测度的有界性.

定义 3.6.10　令 $h_0,h\in\Gamma, x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 是系统 (3.6.1) 的任意解, 系统 (3.6.1) 被称为:

(i)　(h_0,h) 等度有界, 如果对任意 $\alpha>0$ 和 $t_0\in R_+$ 存在 $\beta=\beta(t_0,\alpha)>0$ 使得当 $h_0(x_0)\leqslant\alpha$ 时有 $h(x(t))<\beta, t\geqslant t_0$;

(ii)　(h_0,h) 一致有界, 如果 (i) 中的 β 与 t_0 无关;

(iii)　(h_0,h) 拟最终有界, 如果对任意 $\alpha>0$ 和 $t_0\in R_+$ 存在常数 N 和 $T=T(t_0,\alpha)>0$ 使得 $h_0(x_0)\leqslant\alpha$ 时有 $h(x(t))<N, t\geqslant t_0+T$;

(iv)　(h_0,h) 拟一致最终有界, 如果 (iii) 中的 T 与 t_0 无关;

(v)　(h_0,h) 最终有界, 如果 (i) 和 (iii) 同时成立;

(vi)　(h_0,h) 一致最终有界, 如果 (ii) 和 (iv) 同时成立.

定理 3.6.18　假定

(i) $h_0,h\in\Gamma$, 存在 $\phi\in K$ 使得 $h(x)\leqslant\phi(h_0(x))$;

(ii) $\exists V\in v_0, b\in KR, a\in K$ 使得

$$b(h(x))\leqslant V(x)\leqslant a(h_0(x));$$

(iii) $\exists C_k \in P$ 使得

$$D^+V(t,x,y) \leqslant \frac{\mu_k}{\Delta t_k} C_k(V(x)), \qquad t \neq t_k, k = 1,2,\cdots;$$

(iv) $V(x+I_k(x)) - V(x) \leqslant \nu_k \psi_k(V(x))$, 其中 $\mu_k + \nu_k \leqslant 0, \psi_k \in P, \psi_k \geqslant C_k, k = 1,2,\cdots$;

(v) 不等式

$$\mu_k + \int_{\sigma}^{\nu_k\psi_k(\sigma)+\sigma} \frac{ds}{C_k(s)} \leqslant 0$$

对任意 $\sigma > 0$ 和 $k = 1,2,\cdots$ 成立,
则系统 (3.6.1) 是 (h_0,h) 一致有界的.

证明 对任意 $\alpha > 0, t_0 \in R_+$, 取

$$e^{-1}\beta > \max\{a(\alpha), \phi(\alpha)\} \text{ 且} \beta > a(\alpha),$$

下证当 $h_0(x_0) \leqslant \alpha$ 时有

$$h(x(t)) < \beta, \qquad t \geqslant t_0. \tag{3.6.66}$$

若不然, 存在系统 (3.6.1) 的一个解和 $\tilde{t}: t_i < \tilde{t} \leqslant t_{i+1}, i \in \{1,2,\cdots\}$ 使 $h(x(\tilde{t}^+)) \geqslant \beta$. 令 $m(t) = V(x(t)), m_k = V(x(t_k)), m_k^+ = V(x(t_k^+))$, 由 (iii), (iv) 得到

$$\int_{m_{k-1}^+}^{m_k} \frac{ds}{C_k(s)} \leqslant \mu_k$$

和

$$\int_{m_k}^{m_k^+} \frac{ds}{C_k(s)} \leqslant \int_{m_k}^{\nu_k\psi_k(m_k)+m_k} \frac{ds}{C_k(s)}.$$

故有

$$\int_{m_{k-1}^+}^{m_k^+} \frac{ds}{C_k(s)} \leqslant 0,$$

即

$$m_k^+ \leqslant m_{k-1}^+. \qquad k = 1,2,\cdots.$$

于是

$$m_k^+ \leqslant m_{k-1}^+ \leqslant \cdots \leqslant m_0^+ \leqslant a(h_0(x_0)) < a(t_0,\alpha) < e^{-1}b(\beta), \qquad k = 1,2,\cdots. \tag{3.6.67}$$

对 $\tilde{t} \in (t_i, t_{i+1}]$ 有三种可能:

(i) $\tilde{t} = t_{i+1}$, 则由 (ii) 和 (3.6.67) 有

$$b(\beta) \leqslant b(h(x(\tilde{t}^+))) \leqslant m(\tilde{t}^+) = m({t_{i+1}}^+) \leqslant a(\alpha) < b(\beta),$$

得矛盾.

(ii) $\tilde{t} \in (t_i, t_{i+1})$, 且 $\mu_{i+1} \leqslant 0$, 则由 (iii) 和 (3.6.67) 有

$$b(\beta) \leqslant b(h(x(\tilde{t}^+))) \leqslant m(\tilde{t}^+) = m(\tilde{t}) = m({t_{i+1}}^+) \leqslant a(\alpha) < b(\beta)e^{-1},$$

得矛盾.

(iii) $\tilde{t} \in (t_i, t_{i+1})$, 且 $\mu_{i+1} > 0$, 则 $\nu_{i+1} < 0$, 由 (iv) 得

$$-V(x) \leqslant \nu_i \psi_i(V(x)) \leqslant -\mu_i \psi_i(V(x)),$$

从而有

$$\int_{e^{-1}b(\beta)}^{b(\beta)} \frac{ds}{\psi_i(s)} \geqslant \mu_i \int_{e^{-1}b(\beta)}^{b(\beta)} \frac{ds}{s} = \mu_i. \tag{3.6.68}$$

由 (iii), (iv) 和 (3.6.68) 有

$$\mu_{i+1} > \mu_{i+1} \frac{\tilde{t} - t_i}{t_{i+1} - t_i} \geqslant \int_{m_i^+}^{m(\tilde{t})} \frac{ds}{C_{i+1}(s)} \geqslant \int_{e^{-1}b(\beta)}^{b(\beta)} \frac{ds}{\psi_{i+1}(s)} \geqslant \mu_{i+1},$$

得到矛盾. 故 (3.6.66) 成立. □

定理 3.6.19　假定

(i) $h_0, h \in \Gamma$, 存在 $\phi \in K$, 使得 $h(x) \leqslant \phi(h_0(x))$;

(ii) $\exists V \in v_0, b \in KR, a \in K$ 使得

$$b(h(x)) \leqslant V(x) \leqslant a(h_0(x));$$

(iii) $\exists C_k \in P$, 使得

$$D^+V(t, x, y) \leqslant \frac{\mu_k}{\Delta t_k} C_k(V(x)), \qquad t \neq t_k, k = 1, 2, \cdots;$$

(iv) $V(x + I_k(x)) - V(x) \leqslant \nu_k \psi_k(V(x))$, 其中 $\mu_k + \nu_k \leqslant 0, \psi_k \in P, \psi_k \geqslant C_k, k = 1, 2, \cdots$;

(v) 不等式

$$\mu_k + \int_{\sigma}^{\nu_k \psi_k(\sigma) + \sigma} \frac{ds}{C_k(s)} \leqslant -\gamma_k$$

对任意 $\sigma > 0$ 和 $k = 1, 2, \cdots$ 成立, 其中 $\gamma_k \geqslant 0$, 对任意 $\delta > 0$, 都有 $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i C_i(\delta) = +\infty$;

(vi) $\exists A > 0, \varphi \in K$ 使得 $\Delta t_k < A$, 且 $V(x) \leqslant \varphi(h(x))$,

则系统 (3.6.1) 是 (h_0, h) 一致最终有界的.

证明 由定理 3.6.18 和条件 (i)~(iv) 得知系统 (3.6.1) 是 (h_0, h) 一致有界的. 又由 (vi) 知系统 (3.6.1) 还是 (h_0, h) 一致有界的, 故对给定的 $\tilde{\alpha} > 0$, 存在 $\beta = \beta(\tilde{\alpha})$ 使得当 $h(x_0) \leqslant \tilde{\alpha}$ 时有

$$h(x(t)) < \beta, \qquad t \geqslant t_0. \tag{3.6.69}$$

由 (v) 知存在正整数 $N = N(\alpha)$ 使

$$\sum_{k=1}^{N} \gamma_k C_k(b(\tilde{\alpha})) > a(\alpha). \tag{3.6.70}$$

令 $T = T(\alpha) = (N+1)A$, 则 $t_1, t_2, \cdots, t_{N+1} \in [t_0, t_0 + T], t_{N+2} \notin [t_0, t_0 + T]$.

下证存在 $\tilde{t} \in [t_0, t_0 + T]$ 使得

$$h(x(\tilde{t}^+)) < \tilde{\alpha}. \tag{3.6.71}$$

若 (3.6.71) 不成立, 则对 $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$ 有

$$h(x(t^+)) \geqslant \tilde{\alpha}. \tag{3.6.72}$$

由 (iii)~(v) 得

$$\int_{m_{k-1}^+}^{m_k{}^+} \frac{ds}{C_k(s)} \leqslant -\gamma_k,$$

即

$$m_k{}^+ \leqslant m_{k-1}^+ \gamma_k C_k(m_k{}^+).$$

由此递推出

$$\begin{aligned} m_N^+ &\leqslant m(t_0^+) - \sum_{k=1}^{N} \gamma_k C_k(m_k^+) \leqslant a(h_0(x_0)) - \sum_{k=1}^{N} \gamma_k C_k(b(h(x(t_k{}^+)))) \\ &< a(\alpha) - \sum_{k=1}^{N} \gamma_k C_k(b(\tilde{\alpha})) < 0, \end{aligned}$$

得到矛盾. 故 (3.6.71) 式成立. 由 (3.6.69),(3.6.71) 知当 $h_0(x_0) \leqslant \alpha$ 时有 $h(x(t)) < \beta, t \geqslant t_0 + T$, 即系统 (3.6.1) 是 (h_0, h) 一致最终有界. □

定理 3.6.20 假定

(i) $h_0, h \in \Gamma$, 存在 $\phi \in K$ 使 $h(x) \leqslant \phi(h_0(x))$;

(ii) $V \in C[S^c(h_0, \rho), R_+]$, 使 $x, y \in S^c(h_0, \rho)$ 有

(A) $b(h(x)) \leqslant V(x) \leqslant a(h_0(x)), \qquad a \in K, b \in KR$;

(B) $D^+V(t,x,y) \leqslant g(t, V(x), \sigma_k(V(y))), \qquad t \in (t_k, t_{k+1})$;

(C) $V(x + I_k(x)) \leqslant \psi_k(V(x)), \qquad k = 1, 2, \cdots$,

其中 $g \in C[R_+^2, R_+]$ 且 $\psi_k \in C[R_+, R_+], k = 1, 2, \cdots, \psi_k(r)$ 关于 r 单调非减;

(iii) $h_0(x + I_k(x)) \leqslant h_0(x), k = 1, 2, \cdots$,

则由系统 (3.6.4) 零解的有界性得到系统 (3.6.1) 相应的 (h_0, h) 有界性.

证明 (I) $\forall \alpha > \rho > 0$, 若系统 (3.6.4) 的零解等度有界, 则对 $\alpha_1 > a(\alpha), \exists \beta_1 = \beta(t_0, \alpha)$ 使 $u_0 \leqslant \alpha_1$ 时有

$$u(t, t_0, u_0) < \beta_1. \tag{3.6.73}$$

令 $\beta(t_0, \alpha) > \max\{\phi(\alpha), b^{-1}(\beta_1), \alpha\}$, 则 $h_0(x_0) \leqslant \alpha$ 时有 $h(x_0) \leqslant \phi(h_0(x_0)) < \phi(\alpha) < \beta$.

下证:

$$h(x(t)) < \beta, \qquad t \geqslant t_0. \tag{3.6.74}$$

若 (3.6.74) 不成立, 则存在系统 (3.6.1) 的一个解 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, 存在 $t^* > t_0$ 使

$$h(x(t^{*+})) \geqslant \beta, \qquad h_0(x(t^{*+})) > \alpha, \tag{3.6.75}$$

且存在 $\tilde{t} < t^*$ 使

$$h_0(x(\tilde{t})) = \alpha, x(t) \in S^c(h_0, \rho), \qquad t \in [\tilde{t}, t^*]. \tag{3.6.76}$$

由引理 3.6.1 及 (B), (C) 和 (3.6.76) 知

$$V(x(t)) \leqslant r(t, \tilde{t}, V(x(\tilde{t}))), \qquad t \in [\tilde{t}, t^*], \tag{3.6.77}$$

其中 $V(x(\tilde{t})) \leqslant a(h_0(x(\tilde{t}))) = a(\alpha) < \alpha_1$. 于是由 (3.6.73), (3.6.75)~(3.6.77) 有

$$b(\beta) \leqslant b(h(x(t^{*+}))) \leqslant V(x(t^{*+})) \leqslant r(t^{*+}, \tilde{t}, V(x(\tilde{t}))) < b(\beta),$$

得矛盾. 故 (3.6.74) 成立.

(II) 若系统 (3.6.4) 的零解一致有界, 则在上述的证明中 β_1 与 t_0 无关, 从而 β 与 t_0 无关.

(III) 若系统 (3.6.4) 的零解最终有界, 由 (I) 知系统 (3.6.1) 是 (h_0, h) 等度有界的, 且存在 $N_1 > 0$ 和 $T = T(t_0, \alpha)$ 使当 $u_0 \leqslant \alpha_1$ 时有

$$u(t, t_0, x_0) < N_1, \qquad t \geqslant t_0 + T. \tag{3.6.78}$$

令 $N > \max\{b^{-1}(N_1), \phi(\rho)\}$, 则必有当 $h_0(x_0) \leqslant \alpha$ 时有

$$h(x(t)) < N. \tag{3.6.79}$$

事实上，若不然，则存在系统 (3.6.1) 的一个解 $x(t)$, 存在 $t^* \geqslant t_0 + T$ 使

$$h(x(t^{*+})) \geqslant N, \qquad h_0(x(t^{*+})) > \rho. \tag{3.6.80}$$

因 $h_0(x_0) \leqslant \alpha$ 及 (iii),(3.6.80), 故存在 $\tilde{t^*} < t^*$ 使得

$$h_0(x(\tilde{t^*})) = \rho, x(t) \in S^c(h, \rho), \qquad t \in [\tilde{t^*}, t^*]. \tag{3.6.81}$$

于是

$$b(N) \leqslant b(h(x(t^{*+}))) \leqslant V(x(t^{*+})) \leqslant r(t^{*+}, \tilde{t^*}, V(x(\tilde{t^*}))) < N_1 < b(N),$$

得矛盾. 故 (3.6.79) 成立，从而结论成立.

(IV) 若系统 (3.6.4) 的零解一致最终有界，则在证明 (III) 中 β_1, T 与 t_0 无关，从而 β 与 t_0 无关. □

§3.7 脉冲泛函微分系统的稳定性

本节利用部分变元李雅普诺夫函数方法等研究脉冲泛函微分系统的稳定性.

考虑以下脉冲泛函微分系统:

$$\begin{cases} x' = f(t, x_t), & t \neq \tau_k, \\ x(t) = x(t^-) + I_k(x(t^-)), & t = \tau_k, \\ x_{t_0} = \varphi_0, & t_0 \in R_+ \end{cases} \tag{3.7.1}$$

的稳定性, 其中 $f: R_+ \times C_H \to R^n$, $I_k: R^n \to R^n$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-r, 0]$, $\varphi_0 \in C = C[[-r,0], R^n]$, $C_H = \{\varphi \in C : \|\varphi\| < H\}$, $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(\theta)|\} : -r \leqslant \theta \leqslant 0\}$, $|x| = \max\{|x_i| : 1 \leqslant i \leqslant n\}$, $x \in R^n$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \tau_k = +\infty$.

我们总假定 $f(t, \varphi)$, I_k 满足适当的条件以保证系统 (3.7.1) 的解的整体存在性和唯一性 [1,2]. 系统 (3.7.1) 的过 $(t_0, \varphi_0) \in R_+ \times C_H$ 定义在 $[t_0 - r, +\infty)$ 上的解记为 $x(t, t_0, \varphi_0)$ 或简记为 $x(t)$.

在稳定性研究中，假定 $f(t, 0) = 0$, $I_k(0) = 0$, $t \in R_+$, 从而系统 (3.7.1) 有零解. 将 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$ 分成 m 个向量 $(1 \leqslant m \leqslant n)$:

$$(x_1^{(1)}, \cdots, x_{n_1}^{(1)})^T, \ \cdots, \ (x_1^{(m)}, \cdots, x_{n_m}^{(m)})^T,$$

使得 $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$, 且 $\{x_1^{(1)}, \cdots, x_{n_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \cdots, x_{n_2}^{(2)}, \cdots, x_1^{(m)}, \cdots, x_{n_m}^{(m)}\} = \{x_1, \cdots, x_n\}$.

为方便起见，记

$$J = \{1, 2, \cdots, m\}; \ \ x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \cdots, x_{n_j}^{(j)})^T, \qquad j \in J$$

及

$$x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)})^T.$$

令

$$|x^{(j)}| = \max\{|x_k^{(j)}| : 1 \leqslant k \leqslant n_j\}, \qquad j \in J,$$

从而

$$|x| = \max\{|x^{(j)}| : j \in J\}.$$

定义 3.7.1 函数 $V: R_+ \times R^{n_j} \to R_+$(对某个 $j \in J$) 称为系统 (3.7.1) 的部分 Lyapunov 函数，若

(i) V 在 $[\tau_{k-1}, \tau_k) \times R^{n_j}$ 上连续，$\lim\limits_{(t,y^{(j)})\to(\tau_k^-, x^{(j)})} V(t, y^{(j)})$ 存在 $(k \in N)$；

(ii) $V(t, x^{(j)})$ 关于 $x^{(j)}$ 满足局部 Lipschitz 条件.

定义 3.7.2 V 沿系统 (3.7.1) 的解的导数定义为

$$D^+V(t, x^{(j)}(t)) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}[V(t+h, x^{(j)}(t+h)) - V(t, x^{(j)}(t))],$$

其中 $x(t) = (x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \cdots, x^{(m)}(t))^T$ 为系统 (3.7.1) 的解.

定义 3.7.3 脉冲泛函微分系统 (3.7.1) 的零解被称为:

(i) 稳定的，若对任意的 $\varepsilon > 0$, $t_0 \in R_+$, 存在 $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, 使当 $\|\varphi_0\| < \delta$ 时有 $|x(t)| < \varepsilon$, $t \geqslant t_0$;

(ii) 一致稳定的，若在 (i) 中 δ 与 t_0 无关;

(iii) 吸引的，若对任意的 $\varepsilon > 0$, $t_0 > 0$, 存在 $\delta = \delta(t_0) > 0, T = T(t_0, \varepsilon) > 0$, 使当 $\|\varphi_0\| < \delta$ 时有 $|x(t)| < \varepsilon$, $t \geqslant t_0 + T$;

(iv) 一致吸引的，若在 (iii) 中 δ 和 T 都与 t_0 无关;

(v) 等度渐近稳定的，若 (i) 和 (iii) 同时成立;

(vi) 一致渐近稳定的，若 (ii) 和 (iv) 同时成立.

对应于系统 (3.7.1), 我们还要考虑比较系统:

$$\begin{cases} w'(t) = g(t, w), & t \neq \tau_k, \\ w(t) = w(t^-) + J_k(w(t^-)) = B_k(w(t^-)), & t = \tau_k, \\ w_{t_0} = w_0, & t_0 \in R_+, \end{cases} \tag{3.7.2}$$

其中 $g \in C[G_k \times Z, R^N]$, $B_k(s) < s, k = 1, 2, \cdots$.

为方便起见，首先引入以下几类函数:

$K = \{a(u) \in C[R_+, R_+]$, 关于 u 严格单增且 $a(0) = 0\}$,

$CK = \{a(t, u) \in C[[-r, +\infty) \times R_+, R_+]$, 对任意的 $t \in [-r, +\infty)$, $a(t, u) \in K\}$,

$\Gamma = \{h \in C[R_+ \times R^n, R_+] : \inf\limits_{(t,x)} h(t, x) = 0, (t, x) \in R_+ \times R^n\}$,

$\Gamma_0 = \{h \in C[R_+ \times R^n,\ R_+]:$ 对每个 $t \in R_+, \inf\limits_x h(t,x) = 0\}$,

$\Sigma = \{Q \in C^1[Z,\ R_+]:\ Q(0) = 0$ 且在 Z 上, $Q(w)$ 严格单增 $\}$,

$\Omega = \{H \in C[R_+,\ R_+]:\ H(0) = 0,\ H(s) > 0,\ \ s > 0\}$.

首先，我们给出用普通 Lyapunov 函数法得到的系统 (3.7.1) 的关于两个测度的稳定性定理.

定理 3.7.1 若存在 $a, b, \psi \in K$, $V \in V_0$ 以及常数 ρ, $\rho_0 > 0$ 满足

(i) $h, h^0 \in \Gamma$, 且当 $h^0(t,x) < \rho_0$ 时有 $h(t,x) \leqslant \psi(h^0(t,x))$;

(ii) 当 $h(t,x) < \rho$ 时有 $a(h(t,x)) \leqslant V(t,x)$; 当 $h^0(t,x) < \rho_0$ 时有 $V(t,x) \leqslant b(h^0(t,x))$;

(iii) 任意 $k \in Z^+$, 当 $h(t,x) < \rho$ 时有

$$V(\tau_k, x + I_k(x)) \leqslant (1 + b_k) V(\tau_k^-, x), b_k \geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty;$$

(iv) 对 (3.7.1) 的任意解 $x(t)$, 当 $V(t+s, x(t+s)) \leqslant V(t, x(t))$, $\ -r \leqslant s \leqslant 0$ 时有

$$D^+ V(t, x(t)) \leqslant 0;$$

(v) 存在 $\rho_1 (< \rho)$, 当 $h(t,x) < \rho_1$ 时有 $h(t, x + I_k(x)) < \rho$, $k \in Z^+$,

则系统 (3.7.1) 是 (h_0, h) 一致稳定的.

证明 由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$, 记 $M = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 + b_k)$, 则 $1 \leqslant M < \infty$. 对任意 $\varepsilon > 0 (\varepsilon < \rho_1)$, 取 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 满足以下条件：$\psi(\delta) < \varepsilon, \delta < \rho_0, M b(\delta) < a(\varepsilon)$. 令 $t_0 \in [\tau_{m-1}, \tau_m), m \in Z^+$, 记 $x(t) = x(t; t_0, \varphi_0)$ 是系统 (3.7.1) 满足 $x_{t_0} = \varphi_0$ 的解. 下证 $h_0(t_0, \varphi_0) \leqslant \delta$ 时有

$$h(t, x(t)) < \varepsilon. \tag{3.7.3}$$

为方便起见，记 $V(t) = V(t, x(t))$, 下证

$$V(t) \leqslant b(\delta), \qquad t_0 \leqslant t < \tau_m. \tag{3.7.4}$$

显然，当 $h_0(t_0, \varphi_0) \leqslant \delta$ 时有

$$h(t, x(t)) \leqslant \psi(h^0(t, x(t))) \leqslant \psi(h_0(t_0, \varphi_0)) \leqslant \psi(\delta) < \varepsilon, \qquad t_0 - r \leqslant t \leqslant t_0,$$

从而由 (ii) 知

$$V(t) < b(\delta), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_0.$$

若 (3.7.4) 不成立，则存在 $r_1 \in (t_0, \tau_m)$, 使得 $V(t_1) > b(\delta)$. 再由 $V(t)$ 在 $t \in [t_0, \tau_m)$ 连续，必存在 $r_2 \in [t_0, r_1), V(r_2) = b(\delta) \geqslant V(r_2 + s), -r \leqslant s \leqslant 0$ 且 $D^+ V(r_2) > 0$. 而由 (iv) 知， $D^+ V(r_2) \leqslant 0$, 得矛盾.

下面说明当 $V(t) \leqslant Mb(\delta) < a(\varepsilon), t_0 \leqslant t \leqslant t'$($t'$可以是$\infty$) 时有 $h(t,x(t)) < \rho, t_0 \leqslant t \leqslant t'$. 事实上,由 $h(t,x(t)) < \varepsilon$, $t_0 - r \leqslant t \leqslant t_0$,若存在 $t^* \in (t_0, t'], h(t^*, x(t^*)) \geqslant \rho$, 结合条件 (v) 知, 必有 $t^0 \in (t_0, t^*), \rho_1 < h(t^0, x(t^0)) < \rho$. 再由 (ii) 知 $V(t^0, x(t^0)) > a(h(t^0, x(t^0))) > a(\rho_1) > a(\varepsilon)$, 矛盾.

结合条件 (iii) 知

$$V(\tau_m) \leqslant (1+b_m)V(\tau_m^-) \leqslant (1+b_m)b(\delta),$$

从而

$$V(t) \leqslant (1+b_m)b(\delta), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant \tau_m.$$

再证

$$V(t) \leqslant (1+b_m)b(\delta), \qquad \tau_m \leqslant t < \tau_{m+1}. \tag{3.7.5}$$

否则, 类似于 (3.7.4) 的证明, 必存在 $r_3 \in (\tau_m, \tau_{m+1})$, 使得 $V(r_3) = (1 + b_m)b(\delta), V(r_3) \geqslant V(r_3 + s), -r \leqslant s \leqslant 0$ 且 $D^+V(r_3) > 0$. 结合条件 (iv) 得 $D^+V(r_3) \leqslant 0$, 矛盾. 从而 (3.7.5) 成立.

由 (iii) 知

$$V(\tau_{m+1}) \leqslant (1+b_{m+1})V(\tau_{m+1}^-) \leqslant (1+b_m)(1+b_{m+1})b(\delta).$$

类似可证

$$V(t) \leqslant \prod_{i=m}^{m+k}(1+b_i)b(\delta), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant \tau_{m+k}.$$

令 $k \to \infty$, 则有

$$V(t) \leqslant Mb(\delta) < a(\varepsilon), \qquad t \geqslant t_0.$$

再结合条件 (ii), $a(h(t,x(t))) \leqslant V(t,x(t)) < a(\varepsilon)$, 从而

$$h(t,x(t)) < \varepsilon, \qquad t \geqslant t_0.$$

故系统 (3.7.1) 是 (h_0, h) 一致稳定的. □

定理 3.7.2　若在定理 3.7.1 中只将条件 (iv) 改为

(iv*) 对系统 (3.7.1) 的任意解 $x(t)$, 当 $h(t,x(t)) < \rho$ 且 $V(t+s, x(t+s)) \leqslant P(V(t,x(t))), -r \leqslant s \leqslant 0$ 时有

$$D^+V(t,x(t)) \leqslant -H(h^0(t,x(t))),$$

其中函数 $P: [0,\infty) \to [0,\infty), P(s) > Ms, s > 0, M = \prod\limits_{k=1}^{\infty}, H \in \Omega$,

则系统 (3.7.1) 是 (h_0, h) 一致渐近稳定的.

证明 显然定理 3.7.2 的条件比定理 3.7.1 的条件强, 从而由定理 3.7.1 知道系统 (3.7.1) 是 (h_0,h) 一致稳定的. 取 $\varepsilon=\rho_1$, 则存在 $\delta=\delta(\rho_1)$, 当 $h_0(t_0,\varphi_0)\leqslant\delta$ 时有 $h(t,x(t))<\rho_1, V(t,x(t))\leqslant Mb(\delta), t\geqslant t_0$, 其中 $x(t)=x(t;t_0,\varphi_0)$ 是系统 (3.7.1) 满足 $x_{t_0}=\varphi_0$ 的解. 对任意 $\varepsilon>0(\varepsilon<\rho_1)$, 令 $\gamma_1=H(\rho_0),\gamma_2=H(b^{-1}(M^{-1}a(\varepsilon)))$, 取 $\gamma=\max\{\gamma_1,\gamma_2\}, d=\inf\{P(s)-Ms: M^{-1}a(\varepsilon)\leqslant s\leqslant Mb(\delta)\}$. 令 $N=N(\varepsilon)>0$ 是满足 $Mb(\delta)\leqslant M^{-1}[a(\varepsilon)+Nd]$ 的最小正整数. 记 $V(t)=V(t,x(t))$. 下用归纳法证明

$$V(t)\leqslant a(\varepsilon)+(N-i)d,\qquad t\geqslant t_0+iT',\ \text{其中 } T' \text{ 待定}. \tag{3.7.6}$$

首先 $k=0$ 时, 结论显然成立.

我们假设 $k=i$ 时, 结论成立, 即

$$V(t)\leqslant a(\varepsilon)+(N-i)d,\qquad t\geqslant t_0+iT'.$$

下证: 存在点 $t^*\in[t_0+iT'+r,t_0+(i+1)T']$, 使得

$$V(t^*)<M^{-1}[a(\varepsilon)+(N-i-1)d]. \tag{3.7.7}$$

若不然对 $t\in[t_0+iT'+r,t_0+(i+1)T']$ 有

$$V(t)>M^{-1}[a(\varepsilon)+(N-i-1)d],$$

则

$$P(V(t))>MV(t)+d\geqslant a(\varepsilon)+(N-i-1)d+d=a(\varepsilon)+(N-i)d\geqslant V(t+s),$$
$$-r\leqslant s\leqslant 0.$$

从而由条件 (iv) 知

$$D^+V(t)\leqslant -H(h^0(t,x(t)))\leqslant -\gamma.$$

对上式从 $t_0+iT'+r$ 到 $t_0+(i+1)T'$ 积分, 我们记 $s_i=t_0+iT'+r, s_{i+1}=t_0+(i+1)T', M'=\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_k$, 则有

$$\begin{aligned}V(s_{i+1})&\leqslant V(s_i)-\gamma(s_{i+1}-s_i)+\sum_{s_i<\tau_j\leqslant s_{i+1}}[V(\tau_j)-V(\tau_j^-)]\\&\leqslant V(s_i)-\gamma(s_{i+1}-s_i)+\sum_{s_i<\tau_j\leqslant s_{i+1}}b_jV(\tau_j^-)\\&\leqslant Mb(\delta)[1+M']-\gamma(T'-r).\end{aligned}$$

只要取 $T'=r+\dfrac{Mb(\delta)(1+M')}{\gamma}$, 则有 $V(s_{i+1})\leqslant 0$, 矛盾. 从而 (3.7.7) 成立.

下证：$t \geqslant t^*$ 时有

$$V(t) \leqslant a(\varepsilon) + (N-i-1)d.$$

设 $t^* \in [\tau_{j-1}, \tau_j), j \in Z^+$. 首先证

$$V(t) \leqslant M^{-1}[a(\varepsilon) + (N-i-1)d], \qquad t \in (t^*, \tau_j). \tag{3.7.8}$$

否则，存在 $r_1 \in (t^*, \tau_j)$ 使得 $V(r_1) > M^{-1}[a(\varepsilon) + (N-i-1)d] \geqslant V(t^*)$, 这意味着存在 $r_2 \in [r_1, \tau_j)$, 使得

$$D^+V(r_2) > 0, V(r_2) \geqslant M_{-1}[a(\varepsilon) + (N-i-1)d],$$

从而

$$P(V(r_2)) > MV(r_2) + d \geqslant a(\varepsilon) + (N-i)d \geqslant V(r_2 + s), \qquad -r \leqslant s \leqslant 0.$$

由 (iv) 知 $D^+V(r_2) \leqslant 0$, 得矛盾. 于是 (3.7.8) 成立. 再由条件 (iii) 知

$$V(\tau_j) \leqslant (1+b_j)V(\tau_j^-) \leqslant (1+b_j)M^{-1}[a(\varepsilon) + (N-i-1)d].$$

类似可证

$$V(t) \leqslant (1+b_j)M^{-1}[a(\varepsilon) + (N-i-1)d], \qquad \tau_j \leqslant t < \tau_{j+1}.$$

再由 (iii) 知

$$V(\tau_{j+1}) \leqslant (1+b_j)(1+b_{j+1})M^{-1}[a(\varepsilon) + (N-i-1)d],$$

归纳之，便有

$$V(t) \leqslant \prod_{i=1}^{l}(1+b_i)M^{-1}[a(\varepsilon)(N-i-1)d], \qquad \tau_{j+l-1} \leqslant t \leqslant \tau_{j+l}.$$

令 $l \to \infty$, 则有

$$V(t) \leqslant MM^{-1}[a(\varepsilon) + (N-i-1)d], \qquad t \geqslant t^*.$$

故

$$V(t) \leqslant MM^{-1}[a(\varepsilon) + (N-i-1)d], \qquad t \geqslant t_0 + (i+1)T',$$

即在 (3.7.6) 中，当 $k = i+1$ 时成立. 由归纳法知 (3.7.6) 成立. 在其中取 $i = N$ 则有

$$V(t) \leqslant a(\varepsilon), \qquad t \geqslant t_0 + NT'.$$

再结合 (ii) 我们有

$$h(t,x(t)) \leqslant a(\varepsilon), \qquad t \geqslant t_0 + T,$$

其中 $T = NT'$ 与 t_0 无关. 因此系统 (3.7.1) 是 (h_0, h) 一致吸引的, 即系统 (3.7.1) 是 (h_0, h) 一致渐近稳定的. □

定理 3.7.3 若存在 $a, b, \psi \in K, V \in V_0$ 以及常数 $\rho_0, \rho > 0$ 满足

(i) $h, h^0 \in \Gamma$, 且当 $h^0(t,x) < \rho_0$ 时有 $h(t,x) \leqslant \psi(h^0(t,x))$;

(ii) 当 $h(t,x) < \rho$ 时有 $a(h(t,x)) \leqslant V(t,x)$; 当 $h^0(t,x) < \rho_0$ 时有 $V(t,x) \leqslant b(h^0(t,x))$;

(iii) 任意 $k \in Z^+$, 当 $h(t,x) < \rho$ 时有

$$V(\tau_k, x + I_k(x)) \leqslant (1 + b_k)V(\tau_k^-, x), \qquad \text{其中} b_k \geqslant 0, \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty;$$

(iv) 对任意 $R > 0, \lambda > 0$ 存在 $\gamma = \gamma(R, \lambda) > 0$, 对系统 (3.7.1) 的任意解 $x(t) = x(t; t_0, \varphi_0)$ 当 $h(t, x(t)) \leqslant R, t_0 - r \leqslant s \leqslant t, P(V(t, x(t))) \geqslant V(s, x(s)), \max\{t_0 - r, t - \gamma\} \leqslant s \leqslant t$ 时有

$$D^+V(t,x(t)) \leqslant \lambda - H(h^0(t,x(t))),$$

其中函数 $P: [0,\infty) \to [0,\infty), P(s) > Ms, s > 0, M = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + b_k), H \in \Omega$;

(v) 存在 $\rho_1 (< \rho)$ 当 $h(t,x) < \rho_1$ 时有 $h(t, x + I_k(x)) < \rho, k \in Z^+$,

则系统 (3.7.1) 是 (h_0, h) 一致渐近稳定的.

证明从略.

因为有时 Lyapunov 函数的选取比较困难, 所以我们还可采用部分 Lyapunov 函数法来研究系统. 这种方法的好处在于对 Lyapunov 函数的要求比较低, 不需要每个分量都满足一定条件. 下面就用部分 Lyapunov 函数法来给出系统 (3.7.1) 解的稳定性定理.

定理 3.7.4 假设存在部分 Lyapunov 函数 $V_j(t, x^{(j)})(j \in J)$ 及常数 $\beta_0 > 0$ 使得

(i) $u_j(|x^{(j)}|) \leqslant V_j(t, x^{(j)}) \leqslant v_j(|x^{(j)}|)$, u_j, $v_j \in K$, $j \in J$;

(ii) 对任意的 $\alpha \in (0, \beta_0]$ 及任意的 $\sigma > 0$, 存在 $\mu = \mu(\alpha, \sigma) > 0$, 使当 $V_i(t, x^{(i)}(t)) = \max\{V_j(t, x^{(j)}(t)) : j \in J\}, \alpha \leqslant V_i(t, x^{(i)}(t))$, 且 $V_i(t+s, x^{(i)}(t+s)) \leqslant \min\{\beta_0, V_i(t, x^{(i)}(t)) + \mu\}$, $s \in [-r, 0]$ 时有

$$D^+V_i(t, x^{(i)}(t)) \leqslant -\lambda_i(t)(w_i(|x^{(i)}(t)|) - \sigma), \qquad t \neq \tau_k,$$

其中 $w_j \in C[R_+, R_+]$, $w_j(s) > 0$, $s > 0$, $\lambda_j \in C[R_+, R_+]$, $j \in J$;

(iii) $V_j(t,x^{(j)}(t)) \leqslant (1+d_k)V_j(t^-,x^{(j)}(t^-)),\ t=\tau_k$,

其中，$M=\prod\limits_{k=1}^{+\infty}(1+d_k)<+\infty,\ d_k\geqslant 0$,

则系统 (3.7.1) 的零解是一致稳定的.

证明 设 $x(t)=(x^{(1)}(t),\cdots,x^{(m)}(t))^T$ 为系统 (3.7.1) 的一个解，记 $V_j(t)=V_j(t,x^{(j)}(t))$ 及 $D^+V_j(t)=D^+V_j(t,x^{(j)}(t)),\ j\in J$.

定义 $V(t)=\max\{V_j(t):j\in J\}$. 显然，$V(t)$ 在 $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}[\tau_{k-1},\tau_k)$ 上连续.

对于任给的 $\varepsilon>0(\varepsilon<H)$, 可假定 $u_j(\varepsilon)<\beta_0,\ j\in J$. 令 $\varepsilon^*=\min\left\{\dfrac{u_j(\varepsilon)}{M}:j\in J\right\}$. 此时 $\varepsilon^*>0$, 取 $\delta>0$ 使

$$v_j(\delta)<\frac{\varepsilon^*}{2},\qquad j\in J.$$

对 $t_0\in[\tau_{m-1},\tau_m),\ \varphi_0\in C_\delta$, 令 $x(t)=x(t,t_0,\varphi_0),\ V(t)=V(t,x(t,t_0,\varphi_0))$, 由 (i) 得

$$V_j(t)\leqslant v_j(|x^{(j)}(t)|)<v_j(\delta)<\frac{\varepsilon^*}{2},\qquad t\in[t_0-r,t_0],\ j\in J.$$

所以 $V(t)<\dfrac{\varepsilon^*}{2},\ t\in[t_0-r,t_0]$.

下证:

$$V(t)\leqslant\frac{\varepsilon^*}{2},\qquad t\in[t_0,\tau_m).\tag{3.7.9}$$

否则，存在 $i\in J$, 存在 $\bar t\in(t_0,\tau_m)$ 使

$$\begin{aligned}&V_i(\bar t)=\max\{V_j(\bar t):j\in J\},\qquad \frac{\varepsilon^*}{2}<V_i(\bar t)<u_j(\varepsilon),\\&D^+V_i(\bar t)>0,V_i(t)\leqslant V_i(\bar t),\qquad t\in[t_0,\bar t].\end{aligned}$$

但由 $v_i(|x^{(i)}(\bar t)|)\geqslant V_i(\bar t)>\dfrac{\varepsilon^*}{2}>v_i(\delta)$ 可推出 $|x^{(i)}(\bar t)|>\delta$; 而由 $u_i(|x^{(i)}(\bar t)|)\leqslant V_i(\bar t)<\varepsilon^*\leqslant u_i(\varepsilon)$ 可推出 $|x^{(i)}(\bar t)|\leqslant\varepsilon$.

今设 $\sigma>0$ 使 $\sigma<\inf\{w(s):\delta\leqslant s\leqslant\varepsilon\}$, 其中 $w(s)=\min\{w_j(s):j\in J\}$. 令 $\alpha=\min\{v_j(\delta):j\in J\}$. 易见，$\alpha\leqslant v_j(\delta)<\varepsilon^*\leqslant u_j(\varepsilon)<\beta_0$, 则

$$\alpha\leqslant v_i(\delta)\leqslant V_i(\bar t),\ V_i(\bar t+s)\leqslant V_i(\bar t)<\beta_0,\ V_i(\bar t+s)\leqslant V_i(\bar t)+\mu,\qquad \forall\mu>0,\ s\in[-r,0].$$

因而由 (ii) 得

$$\begin{aligned}D^+V_i(\bar t)&\leqslant-\lambda_i(t)(w_i(|x^{(i)}(\bar t)|)-\sigma)\\&\leqslant-\lambda_i(t)(w(|x^{(i)}(\bar t)|)-\sigma)\\&\leqslant 0.\end{aligned}$$

得矛盾. 所以 (3.7.9) 成立. 由 (iii) 得

$$V(\tau_m) \leqslant (1+d_m)V(\tau_m^-) \leqslant (1+d_m)\frac{\varepsilon^*}{2}.$$

再证:

$$V(t) \leqslant \frac{(1+d_m)\varepsilon^*}{2}, \qquad t \in [\tau_m, \tau_{m+1}).$$

否则, 存在 $i \in J$, $\tilde{t} \in (\tau_m, \tau_{m+1})$ 使

$$\begin{aligned} &V_i(\tilde{t}) = \max\{V_j(\tilde{t}) : j \in J\}, \qquad \frac{(1+d_m)\varepsilon^*}{2} < V_i(\tilde{t}) < u_j(\varepsilon), \\ &D^+V_i(\tilde{t}) > 0, \quad V_i(t) \leqslant V_i(\tilde{t}), \qquad t \in [\tilde{t}-r, \tilde{t}]. \end{aligned}$$

类似于前面的证明, 结合 (ii) 得

$$D^+V_i(\tilde{t}) \leqslant 0,$$

导致矛盾. 所以

$$V(t) \leqslant \frac{(1+d_m)\varepsilon^*}{2}, \qquad t \in [\tau_m, \tau_{m+1}).$$

由 (iii) 知

$$V(\tau_{m+1}) \leqslant (1+d_{m+1})V(\tau_{m+1}^-) \leqslant \frac{(1+d_{m+1})(1+d_m)\varepsilon^*}{2}.$$

类似可证

$$V(t) \leqslant \prod_{i=m}^{m+k} \frac{(1+d_i)\varepsilon^*}{2}, \qquad t \in [t_0, \tau_{m+k+1}).$$

令 $k \to +\infty$, 则有

$$V(t) \leqslant \frac{M\varepsilon^*}{2}, \qquad t \geqslant t_0.$$

所以

$$u_j(|x^{(j)}(t)|) \leqslant V_j(t) \leqslant V(t) < u_j(\varepsilon), \qquad t \geqslant t_0, \ j \in J.$$

于是

$$|x^{(j)}(t)| < \varepsilon, \qquad t \geqslant t_0, \ j \in J,$$

因而

$$|x(t)| < \varepsilon, \qquad t \geqslant t_0.$$

由定义知系统 (3.7.1) 的零解是一致稳定的. □

定理 3.7.5 在定理 3.7.4 中将 (ii) 改为

(ii)′ 对任意的 $\alpha : M\alpha \in (0,\beta_0]$ 及 $\sigma > 0$, 存在 $\mu = \mu(\alpha,\sigma) > 0$, 使当 $V_i(t,x^{(i)}(t)) = \max\{V_j(t,x^{(j)}(t)) : j \in J\}$,$\alpha \leqslant V_i(t,x^{(i)}(t))$, 且 $V_i(t+s,x^{(i)}(t+s)) \leqslant \min\{\beta_0, MV_i(t,x^{(i)}(t))+\mu\}$, $s \in [-r,0]$ 时有

$$D^+V_i(t,x^{(i)}(t)) \leqslant -\lambda_i(t)(w_i(|x^{(i)}(t)|)-\sigma), \qquad t \neq \tau_k,$$

其中 $w_j \in C[R_+,R_+]$, $w_j(s) > 0$, $s > 0$, $j \in J$, $\lambda_j \in C[R_+,R_+]$; 对任给的 $\eta > 0$, 存在 $l = l(\eta) > 0$ 使 $\int_t^{t+l} \lambda_j(s)ds > \eta$, $j \in J$, $t \in R_+$,
则系统 (3.7.1) 的零解是一致渐近稳定的.

证明　当 $V_i(t+s,x^{(i)}(t+s)) \leqslant \min\{\beta_0, V_i(t,x^{(i)}(t))+\mu\}$, $s \in [-r,0]$ 时有

$$V_i(t+s,x^{(i)}(t+s)) \leqslant \min\{\beta_0, MV_i(t,x^{(i)}(t))+\mu\}, \qquad s \in [-r,0].$$

由定理 3.7.4 知, 系统 (3.7.1) 的零解是一致稳定的.

设 $h < H$ 使得 $u_j(h) < \beta_0$, $j \in J$. 对 $\varepsilon = h$, 存在 $\delta = \delta(h) > 0(\delta < h)$. 令 $\eta = \delta$, 于是, 由 $t_0 \in R_+$, $\|\varphi_0\| < \eta$, $t \geqslant t_0 - r$ 可推出 $V(t) \leqslant \dfrac{Mh^*}{2} < \beta_0$ 及 $|x(t)| < h$, 其中 $h^* = \min\left\{\dfrac{u_j(h)}{M} : j \in J\right\}$.

对于任给的 $\gamma > 0(\gamma < h)$, 将找到 $T(\gamma) > 0$ 使得由 $t_0 \in R_+$, $\|\varphi_0\| < \eta$, $t \geqslant t_0 + T$ 可推出 $|x(t)| = |x(t,t_0,\varphi_0)| < \gamma$.

令 $u(s) = \min\{u_j(s) : j \in J\}$, $v(s) = \max\{v_j(s) : j \in J\}$, 及 $w(s) = \min\{w_j(s) : j \in J\}$.

选取 $\sigma = \inf\left\{w(s) : v^{-1}\left(\dfrac{u(\gamma)}{2M}\right) \leqslant s \leqslant h\right\}/2$ 及 $\alpha = \dfrac{u(\gamma)}{2M}$.

此时由假设 (ii) 知存在相应的 $\mu = \mu(\alpha,\sigma) > 0$ 具有所指定的性质.

取 $\eta = \dfrac{\beta_0}{\sigma}$, 存在 $l(\eta) > 0$ 使

$$\int_t^{t+l} \lambda_j(s)ds > \frac{\beta_0}{\sigma}, \qquad j \in J,\ t \in R_+.$$

令 N 为满足下面不等式的最小正整数:

$$\frac{u(\gamma)}{2} + N\mu > \beta_0.$$

取 $t_k \geqslant t_{k-1} + r$ 使得

$$\int_{t_{k-1}+r}^{t_k} \lambda(s)ds = \frac{\beta_0(1+M')}{\sigma}, \qquad k = 1,2,\cdots,N, \tag{3.7.10}$$

其中 $\lambda(t) = \min\{\lambda_j(t) : j \in J\}$, $M' = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} b_k$.

这就推出

$$t_k - t_{k-1} - r < l, \qquad k = 1, 2, \cdots, N.$$

因而

$$t_N < t_0 + N(l + r).$$

我们断言：

$$V(t) \leqslant \frac{u(\gamma)}{2} + (N-k)\mu, \qquad t \geqslant t_k,\ k = 0, 1, 2, \cdots, N. \tag{3.7.11}$$

显然，(3.7.11) 对 $k=0$ 成立. 现假设对某个 k, $0 \leqslant k < N$ 成立.

要证：

$$V(t) \leqslant \frac{u(\gamma)}{2} + (N-k-1)\mu, \qquad t \geqslant t_{k+1}. \tag{3.7.12}$$

为此先证：存在 $\bar{t} \in [t_k + r, t_{k+1}]$ 使得

$$V(\bar{t}) < \frac{1}{M}\left[\frac{u(\gamma)}{2} + (N-k-1)\mu\right]. \tag{3.7.13}$$

若不然，则

$$V(t) \geqslant \frac{1}{M}\left[\frac{u(\gamma)}{2} + (N-k-1)\mu\right], \qquad t \in [t_k + r, t_{k+1}]. \tag{3.7.14}$$

另一方面

$$V(t) \leqslant \frac{u(\gamma)}{2} + (N-k)\mu, \qquad t \geqslant t_k. \tag{3.7.15}$$

根据 $V_j(t)$ 在 $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}[\tau_{k-1}, \tau_k)$ 上连续性，可以假定存在开区间 I_1, I_2, $\cdots$, 使 $I_i \bigcap I_j = \varnothing$, 且 $\bigcup\limits_i \bar{I}_i = [t_k + r, t_{k+1}]$, 而 $V(t) = V_{j_i}(t)$ 在每个 I_i 上对某个 $j_i \in J$. 从 (3.7.14) 和 (3.7.15) 知，在 I_i 上有

$$V_{j_i}(t) = V(t) \geqslant \frac{u(\gamma)}{2M} = \alpha. \quad V_{j_i}(t+s) \leqslant V(t+s) < \beta_0, \qquad s \in [-r, 0]$$

以及

$$\begin{aligned} V_{j_i}(t+s) &\leqslant V(t+s) \leqslant \frac{u(\gamma)}{2} + (N-k)\mu \\ &\leqslant MV(t) + \mu = MV_{j_i}(t) + \mu, \qquad s \in [-r, 0]. \end{aligned}$$

于是根据假设 (ii)′ 及 σ 定义，由 $v(|x^{(j_i)}(t)|) \geqslant \dfrac{u(\gamma)}{2M}$ 及 $|x^{(j_i)}(t)| \leqslant |x(t)| < h$ 可推出

$$v^{-1}\left(\frac{u(\gamma)}{2M}\right) \leqslant |x^{(j_i)}(t)| \leqslant h,$$

从而有

$$\begin{aligned}D^+V_{j_i}(t) &\leqslant -\lambda_{j_i}(t)(w_{j_i}(|x^{(j_i)}(t)|)-\sigma)\\ &\leqslant -\lambda_{j_i}(t)(w(|x^{(j_i)}(t)|)-\sigma)\\ &\leqslant -\sigma\lambda(t), \qquad t\neq\tau_k.\end{aligned}$$

因而除了一个 t 的至多可数个点的集合外将有

$$D^+V(t)\leqslant -\sigma\lambda(t), \qquad t\neq\tau_k,\ t\in[t_k+r,t_{k+1}].$$

因此

$$\begin{aligned}V(t_{k+1}^-) &\leqslant V(t_k+r)-\sigma\int_{t_k+r}^{t_{k+1}}\lambda(s)ds+\sum_{t_k+r\leqslant\tau_i<t_{k+1}}(V(\tau_i)-V(\tau_i^-))\\ &<\beta_0-\sigma\cdot\frac{\beta_0(1+M')}{\sigma}+\sum_{t_k+r\leqslant\tau_i<t_{k+1}}d_iV(\tau_i^-)\\ &\leqslant (1+M')\beta_0-(1+M')\beta_0\leqslant 0,\end{aligned}$$

矛盾. 所以存在 $\bar{t}\in[t_k+r,t_{k+1}]$ 而使 (3.7.13) 成立.

设 $\bar{t}\in[\tau_{m-1},\tau_m)$, $j\in N$, 下证:

$$V(t)\leqslant\frac{1}{M}\left[\frac{u(\gamma)}{2}+(N-k-1)\mu\right], \qquad t\in[\bar{t},\tau_m). \tag{3.7.16}$$

否则, 存在 $i\in J$, $\tilde{t}\in(\bar{t},\tau_m)$, 使

$$V_i(\tilde{t})=\max\{V_j(\tilde{t}):j\in J\}, \qquad V_i(\tilde{t})>\frac{1}{M}\left[\frac{u(\gamma)}{2}+(N-k-1)\mu\right]$$

且

$$D^+V_i(\tilde{t})>0.$$

但

$$V_i(\tilde{t})>\frac{u(\gamma)}{2M}=\alpha, \qquad V_i(\tilde{t}+s)<\beta_0,$$

$$\begin{aligned}V_i(\tilde{t}+s)\leqslant V(\tilde{t}+s) &\leqslant\frac{u(\gamma)}{2}+(N-k)\mu\\ &<MV_i(\tilde{t})+\mu, \qquad s\in[-r,0],\end{aligned}$$

$$v^{-1}\left(\frac{u(\gamma)}{2M}\right)\leqslant|x^{(i)}(\tilde{t})|\leqslant h.$$

由 (ii) 得

$$D^+V_i(\tilde{t})\leqslant-\lambda_i(\tilde{t})(w(|x^{(i)}(\tilde{t})|)-\sigma)\leqslant 0,$$

矛盾. 所以 (3.7.16) 成立.

由 (iii) 得

$$V(\tau_m) \leqslant (1+d_m)V(\tau_m^-) \leqslant \frac{1+d_m}{M}\left[\frac{u(\gamma)}{2}+(N-k-1)\mu\right].$$

类似 (3.7.16) 的证明可得

$$V(t) \leqslant \frac{1+d_m}{M}\left[\frac{u(\gamma)}{2}+(N-k-1)\mu\right], \qquad t\in[\tau_m,\tau_{m+1}).$$

类似可证

$$V(t) \leqslant \prod_{i=m}^{m+k}\frac{1+d_i}{M}\left[\frac{u(\gamma)}{2}+(N-k-1)\mu\right], \qquad t\in[\tau_{m+k},\tau_{m+k+1}).$$

令 $k\to+\infty$ 得

$$V(t) \leqslant \frac{u(\gamma)}{2}+(N-k-1)\mu, \qquad t\geqslant \bar{t}.$$

所以

$$V(t) \leqslant \frac{u(\gamma)}{2}+(N-k-1)\mu, \qquad t\geqslant t_{k+1},$$

即 (3.7.12) 成立. 由数学归纳法知 (3.7.11) 成立. 当 $k=N$ 时有

$$V(t) \leqslant \frac{u(\gamma)}{2}, \qquad t\geqslant t_N. \tag{3.7.17}$$

由条件 (i) 和 (3.7.17) 得

$$u_j(|x^{(j)}(t)|) \leqslant V_j(t) \leqslant V(t) < u(\gamma), \qquad j\in J,\ t\geqslant t_N.$$

取 $T=N(l+r)$, 它与 t_0 和 φ_0 无关，这时

$$|x(t)|<\gamma, \qquad t\geqslant t_0+T.$$

所以系统 (3.7.1) 的零解是一致渐近稳定的. □

作为定理 3.7.5 的一种特殊情形，可得下面定理:

定理 3.7.6 假设存在部分 Lyapunov 函数 $V_j(t,x^{(j)})(j\in J)$ 以及常数 $\beta_0>0$ 使得

(i) $u_j(|x^{(j)}(t)|) \leqslant V_j(t,x^{(j)}(t)) \leqslant v_j(|x^{(j)}(t)|),\ j\in J$;

(ii) 对任给 $\alpha: M\alpha\in(0,\beta_0]$, 及 $\sigma>0$, 存在 $\mu=\mu(\alpha,\sigma)>0$, 使当 $V_i(t,x^{(i)}(t))=\max\{V_j(t,x^{(j)}(t)):j\in J\}$, $\alpha\leqslant V_i(t,x^{(i)}(t))$, 且 $V_i(t+s,x^{(i)}(t+s))\leqslant\min\{\beta_0,MV_i(t,x^{(i)}(t))+\mu\}$, $s\in[-r,0]$ 时有

$$D^+V_i(t,x^{(i)}(t)) \leqslant -w_i(|x^{(i)}(t)|)+\sigma, \qquad t\neq\tau_k;$$

(iii) $V_j(t,x^{(j)}(t)) \leqslant (1+d_k)V_j(t^-,x^{(j)}(t^-))$, $t=\tau_k$, 其中, u_j, v_j, $w_j(j\in J)$ 及 M 同定理 3.7.4,
则系统 (3.7.1) 的零解是一致渐近稳定的.

推论 3.7.1 假设存在 $V_j(t,x^{(j)})(j\in J)$ 以及连续函数 $P_j:R_+\to R_+$, $P_j(s)>Ms$ 若 $s>0$, 使得

(i) $u_j(|x^{(j)}|)\leqslant V_j(t,x^{(j)}(t))\leqslant v_j(|x^{(j)}(t)|)$, $j\in J$;

(ii)$_1$ 当 $V_i(t,x^{(i)}(t)) = \max\{V_j(t,x^{(j)}(t)) : j\in J\}$, 且 $V_i(t+s,x^{(i)}(t+s)) < P_i(V_i(t,x^{(i)}(t)))$,$s\in[-r,0]$ 时有

$$D^+V_i(t,x^{(i)}(t))\leqslant -w_i(|x^{(i)}(t)|), \qquad t\neq\tau_k,$$

其中 u_j, v_j, $w_j(j\in J)$ 及 $x(t)=(x^{(1)}(t),x^{(2)}(t),\cdots,x^{(m)}(t))^T$ 同定理 3.7.6;

(iii) $V_j(t,x^{(j)}(t))\leqslant(1+d_k)V_j(t^-,x^{(j)}(t^-))$, $t=\tau_k$, 其中, $M=\prod\limits_{k=1}^{+\infty}(1+d_k)<+\infty$, $d_k\geqslant 0$,
则系统 (3.7.1) 的零解是一致渐近稳定的.

证明 显然, 只需证明由 (ii)$_1$ 可推出定理 3.7.6 中的 (ii).

事实上, 可取任意的 $\beta_0>0$, 对任意的 $\alpha: M\alpha\in(0,\beta_0]$, 及 $\sigma>0$, 可取 $\mu=\mu(\alpha,\sigma)>0$ 使

$$\mu<\min_{j\in J}\{\inf\{P_j(s)-Ms:\alpha\leqslant s\leqslant\beta_0\}\}.$$

于是当 $V_i(t,x^{(i)}(t))=\max\{V_j(t,x^{(j)}(t)):j\in J\}$,$\alpha\leqslant V_i(t,x^{(i)}(t))$ 且 $V_i(t+s,x^{(i)}(t+s))\leqslant\min\{\beta_0,MV_i(t,x^{(i)}(t))+\mu\}$,$s\in[-r,0]$ 时有

$$\begin{aligned}V_i(t+s,x^{(i)}(t+s)) &\leqslant MV_i(t,x^{(i)}(t))+\mu\\ &< MV_i(t,x^{(i)}(t))+P_i(V_i(t,x^{(i)}(t)))-MV_i(t,x^{(i)}(t))\\ &= P_i(V_i(t,x^{(i)}(t))), \qquad s\in[-r,0].\end{aligned}$$

于是从 (ii)$_1$ 推出

$$\begin{aligned}D^+V_i(t,x^{(i)}(t)) &\leqslant -w_i(|x^{(i)}(t)|)\\ &\leqslant -w_i(|x^{(i)}(t)|)+\sigma,\end{aligned}$$

这表明定理 3.7.6 中 (ii) 也成立. 因此由定理 3.7.6 知所需结论成立. □

推论 3.7.2 假设存在 $V(t,x)$ 及常数 $\beta_0>0$, 使

(i)$_2$ $u(|x|)\leqslant V(t,x)\leqslant v(|x|)$;

(ii)$_2$ 对任意的 $\alpha:M\alpha\in(0,\beta_0]$ 及 $\sigma>0$, 存在 $\mu=\mu(\alpha,\sigma)>0$, 当 $\alpha\leqslant V(t,x(t))$ 且 $V(t+s,x(t+s))\leqslant\min\{\beta_0,MV(t,x(t))+\mu\}$,$s\in[-r,0]$ 成立时有

$$D^+V(t,x(t))\leqslant -w(|x(t)|)+\sigma, \qquad t\neq\tau_k,$$

其中 $u,\ v\in K,\ w\in C[R_+,R_+],\ w(s)>0,\ s>0$;

(iii)$_2$ $V(t,x(t))\leqslant(1+d_k)V(t^-,x(t^-)),\ t=\tau_k$, 其中 $d_k\geqslant 0,\ \prod\limits_{k=1}^{+\infty}(1+d_k)<+\infty$,

则系统 (3.7.1) 的零解是一致渐近稳定的.

推论 3.7.3 假设 $V_j,\ u_j,\ v_j,\ w_j(j\in J)$ 均同定理 3.7.6, 且定理 3.7.6 中的假设 (i), (iii) 成立，以及

(ii)$_3$ 当 $V_i(t,x^{(i)}(t))=\max\{V_j(t,x^{(j)}(t)):j\in J\}$ 时有

$$D^+V_i(t,x^{(i)}(t))\leqslant G_i(V_i(t,x^{(i)}(t)),\sup_{-r\leqslant s\leqslant 0}V_i(t+s,x^{(i)}(t+s))),\qquad t\neq\tau_k,$$

其中 $G_j:R_+\times R_+\to R$ 为连续，且 $G_j(y,My)\leqslant -w_j(y),\ y>0,\ j\in J$,
则系统 (3.7.1) 的零解是一致渐近稳定的.

证明 只需指出由 (ii)$_3$ 可推出定理 3.7.6 中的 (ii).

事实上，取任意固定的数 $\beta_0>0$, 对任意的 $\alpha:M\alpha\in(0,\beta_0]$, 及 $\sigma>0$, 根据 $G_j(y,z)(j\in J)$ 在 $[\alpha,M\beta_0]\times[\alpha,M\beta_0]$ 上的一致连续性，存在 $\mu=\mu(\alpha,\sigma)>0$, 使

$$|G_j(y,z)-G_j(y,My)|\leqslant\sigma,\qquad j\in J,\ y,\ z\in[\alpha,\beta_0],\ |My-z|\leqslant\mu.\qquad(*)$$

于是当 $V_i(t,x^{(i)}(t))=\max\{V_j(t,x^{(j)}(t)):j\in J\},\alpha\leqslant V_i(t,x^{(i)}(t))$ 且 $V_i(t+s,x^{(i)}(t+s))\leqslant\min\{\beta_0,MV_i(t,x^{(i)}(t))+\mu\},s\in[-r,0]$ 时有

$$\left|\sup_{-r\leqslant s\leqslant 0}V_i(t+s,x^{(i)}(t+s))-MV_i(t,x^{(i)}(t))\right|\leqslant\mu.$$

于是由 (*) 及 (ii)$_3$ 得

$$\begin{aligned}D^+V_i(t,x^{(i)}(t))\leqslant&-w_i(V_i(t,x^{(i)}(t)))+|G_i(V_i(t,x^{(i)}(t)),\sup_{-r\leqslant s\leqslant 0}V_i(t+s,x^{(i)}(t+s)))\\&-G_i(V_i(t,x^{(i)}(t)),MV_i(t,x^{(i)}(t)))|\\\leqslant&-w_i^*(|x^{(i)}(t)|)+\sigma,\qquad t\neq\tau_k,\end{aligned}$$

其中 $w_i^*(s)=\inf\{w_i(\theta):u_i(s)\leqslant\frac{\theta}{M}\leqslant v_i(s)\}$.

因而 (ii) 成立. □

推论 3.7.4 假设存在 $V_j(t,x^{(j)})(j\in J)$ 及推论 3.7.1 中的那些函数 $u_j,\ v_j,\ w_j,\ P_j$ 及定理 3.7.5 中的 $\lambda_j(j\in J)$ 使

(i) 同定理 3.7.5;

(ii)$_4$ 当 $V_i(t,x^{(i)}(t))=\max\{V_j(t,x^{(j)}(t)):j\in J\},V_i(t+s,x^{(i)}(t+s))<P_i(V_i(t,x^{(i)}(t))),s\in[-r,0]$ 时有

$$D^+V_i(t,x^{(i)}(t))\leqslant-\lambda_i(t)w_i(|x^{(i)}(t)|),\qquad t\neq\tau_k;$$

(iii) 同定理 3.7.5,

则系统 (3.7.1) 的零解是一致稳定，且等度渐近稳定的.

推论 3.7.5 假设存在 $V(t,x)$ 及常数 $\beta_0>0$ 使

$(\mathrm{i})_2, (\mathrm{iii})_2$ 同推论 3.7.5;

$(\mathrm{ii})_5$ 对任意的 $\alpha: M\alpha\in(0,\beta_0]$, $\sigma>0$, 存在 $\mu=\mu(\alpha,\sigma)>0$ 使当 $\alpha\leqslant V(t,x(t))$ 且 $V(t+s,x(t+s))\leqslant\min\{\beta_0, MV(t,x(t))+\mu\}$,$s\in[-r,0]$ 时有

$$D^+V(t,x(t))\leqslant-\lambda(t)(w(|x(t)|)-\sigma),\qquad t\neq\tau_k,$$

其中 u, v, w 均同推论 3.7.2, 而 $\lambda\in C[R_+,R_+]$, $\int_0^{+\infty}\lambda(s)ds=+\infty$,

则系统 (3.7.1) 的零解是一致稳定及等度渐近稳定的. 若对任意的 $\eta>0$, 存在 $l=l(\eta)>0$, 使 $\displaystyle\int_t^{+\infty}\lambda(s)ds>\eta$, $t\in R_+$. 则系统 (I) 的零解是一致渐近稳定的.

推论 3.7.6 假设 V_j, u_j, v_j, w_j 及 $\lambda_j(j\in J)$ 均同定理 3.7.5, 且定理 3.7.5 中的假设 (i), (iii) 成立，以及

$(\mathrm{ii})_6$ 当 $V_i(t,x^{(i)}(t))=\max\{V_j(t,x^{(j)}(t)):j\in J\}$ 时有

$$D^+V_i(t,x^{(i)}(t))\leqslant\lambda_i(t)G_i(V_i(t,x^{(i)}(t)),\sup_{-r\leqslant s\leqslant 0}V_i(t+s,x^{(i)}(t+s))),\qquad t\neq\tau_k,$$

其中 $G_j(j\in J)$ 同推论 3.7.3,

则系统 (3.7.1) 的零解是一致稳定及等度渐近稳定的.

附　注

本章定理 3.1.1~3.1.14 取自 [7] 和 [8], 并参考 [6]. §3.2 节的内容取自 [11]. §3.3 的内容取自 [14~15]. 定理 3.4.1~3.4.4 选自 [20]. §3.5 的全部内容选自 [21~22], 并参考 [23]. 引理 3.6.1 和定理 3.6.1 引自 [24]; 定理 3.6.3 ~3.6.12 选自 [25~26]; 定理 3.6.13~3.6.20 选自 [27]. 定理 3.7.1~3.7.3 选自 [28]; 定理 3.7.4~3.7.6 选自 [29].

和本章有关的内容可参看本章后面所引的参考文献.

参 考 文 献

1 V Lakshmikantham, D D Bainov, P S Simeonov. Theory of impulsive differential equations. World Scientic, Singapore, 1989

2 D D Bainov, G K Kulev, I M Stamova. Instability of solutions of impulsive systems of differential equations. International Journal of Theoretial Physics, 1996, 35(8)

3 Xilin Fu, Liqin Zhang. On boundedness of solutions of impulsive integro-differential systems with fixed moments of impulsive effects. Acta Math ematica scientia, 1997, 17(2): 219~229

4 Xilin Fu, Liqin Zhang. Criteria on boundedness in terms of two measures for Volterra type discrete systems. Nonlinear Anal, 1997, 30(5): 2673~2681

5 Xilin Fu, Xinzhi Liu. Uniform boundedness and stability criteria in terms of two measures for impulsive integro-differential equations. App.Math.Comput., 1999, 102(2~3): 237~255

6 Xinzhi Liu, Allan Willms. Stability Analysis and Applications to Large Scale Impulsive Systems: A New Approach. to appear

7 Xilin Fu, Huixue Lao. Generalized Second Derivative Method and Stability Criteria for Impulsive differential systems, Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems. to appear

8 劳会学. 脉冲微分系统的稳定性分析. 山东师范大学研究生学位论文, 2001

9 Xinzhi Liu. Further extension of the direct method and stability of impulsive systems. Nonliear World, 1994, 1: 341~354

10 V Lakshmikantham, Xinzhi Liu. Stability Analysis in Terms of Two Measures. World Scientic, Singapore, 1993

11 刘开恩. 脉冲微分系统两个测度有界性和稳定性定理. 山东师范大学研究生学位论文, 2000

12 S Leela Kaul, V Lakshmikantham, S Kaul. Extremal solutions, Comparison principle and stability criteria for impulsive differential equations with varible times. Nonlinear Anal. 1994, 22: 1290~1293

13 V Lakshmikantham, S Leela, S Kaul. Comparison principle and stability criteria for impulsive differential equations with varible times and stability theory. Nonlinear Anal. 1994, 22: 499~503

14 Xilin Fu. Jiangang Qi, Yansheng Liu. General comparison principle for impulsive variable time differential equations with application. Nonliear Analysis, 2000, 42: 1421~1429

15 Jiangang Qi, Xilin Fu. Comparison princple for impulsive differential systems with variable times. Indian J. pure appl. Math., 2001, 32(9): 1395~1404

16 V Lakshmikantham, Leela. Differential and integral inequalities. New York: Academic Press. 1969

17 S G Deo, V Lakshmikantham. Method of Variation of Parameters for Dynamics Systems. London: Gordon and Breach Science Publishers, 1997

18 V Lakshmikantham, X Liu, S Leela. Variational Lyapunov method and stability theory. Math. Probl. Engng. 1998, 3: 555~571

19 Xilin Fu, Weijie Feng. Variational Lyapunov method and stability theory. Indian J. pure appl. Math. 2001, 32(11): 1709~1723

20 王克宁. 脉冲摄动微分系统的稳定性理论. 山东师范大学研究生学位论文, 2001

21 Fu Xilin, Zhang Liqin. On boundedness of solutions of impulsive integro-differential systems with fixed moments of impulse effects. ACTA MATHMATIC SCIENTIC, 1997, 17(2): 219~229

22 Xilin Fu, Xinzhi Liu. Uniform boundedness and stability criteria in terms of two measurs for impulsive integro-differential equations. Applied Mathematics and Computation, 1999, 102: 237~255

23 Lakshmikantham V, Xinzhi Liu, Sathananathan S. Impulsive integro-differential equations and extensions of Lyapunov's method. Appl. Anal., 1989. 32: 203~214

24 V Lakshmikantham, Xinzhi Liu. Impulsive hybrid systems and stability theoty. Dynam. Systems Appl., 1998, 7(1): 1~9

25 Xilin Fu, Yanyan Zhang. Eventual stability in terms of two measures for the impulsive hybrid systems. India J. pure appl. Math., 2003, 34(12): 1741~1750

26 张艳燕. 非线性脉冲微分系统稳定性研究. 山东师范大学研究生学位论文, 2002

27 郭飞. 脉冲混合微分系统稳定性分析. 山东师范大学研究生学位论文, 2003

28 邢业鹏. 脉冲泛函微分系统稳定性理论. 山东师范大学研究生学位论文, 2001

29 陈章. 脉冲泛函微分系统的稳定性分析. 山东师范大学研究生学位论文, 2003

30 Xilin Fu. Lagrange stability in terms of two measures for impulsive inegro-differential systems,Dynamics Sysstems and Applications. 1995, 2: 175~181

31 Xinzhi Liu, Xilin Fu. Stability criteria in terms of two measures for discrete systems, Advances in difference equations, II. Comput. Math. Appl. 1998, 36(10～12): 327～337

32 Xilin Fu, Linqin Zhang. Razumikhin-type theorems on boundedness in terms of two measures for functional-differential systems. Dynam. Systems Appl. 1997, 6(4): 589～598

33 Jianhua Shen, Jurang Yan. Razumikhin-type stability theorems for impulsive functional differential equation. Nonlinear Analysis, 1998, 33: 519～537

34 Jurang Yan, Jianhua Shen. Impulsive stabilization of functional differential equations by Lyapunov-Razumikin functions. Nonliear Analysis, 37: 245～255

35 Shunian Zhang. A new approach to staability theorey of functional differential equationsm. Ann. of Diff. Eqs., 1995, 11(4): 495～503

36 张书年. 关于稳定性的勒茹米辛型定理. 数学年刊, 1998, 19A(1): 73～82

37 Jianshe Yu, Binggen Zhang. Stability theorem for delay differential equations with impulses. Journal of Math. Anal. Appl., 1996, 199: 162～175

38 D D Bainov, I M Stamova. Stability of sets for impulsive differential-difference equations with variable impulsive perturbations. Communications on Applied Nonlinear Analysis, 1998, 5(1): 69～81

39 陈章, 傅希林. 脉冲泛函微分方程的 Φ_0 稳定性. 科学技术与工程, 2003, 3(3)

第 4 章　脉冲微分系统的边值问题

微分系统的边值问题是同数学物理问题密切相关的. 对这一问题的研究，早在 Sturm 和 Liouville 时期就已经开始了. 至今，不论在问题的深度和广度方面，还是在研究方法上都有了很大发展. 对脉冲微分系统边值问题的研究，仅有 10 多年的历史 (参见 [4], [11], [15], [34], [43] 及其后面的参考文献). 在此基础上，本章考虑了以下三部分内容. 4.1 节考虑了一阶脉冲微分系统的周期边值问题，4.2 节考虑了有限区间上和无穷区间上二阶脉冲微分系统的边值问题，4.3 节研究了具有无穷延滞的脉冲泛函微分系统的边值问题.

§4.1　一阶脉冲微分系统的周期边值问题

众所周知，在求常微分方程或具有固定时刻的脉冲微分方程极解时，单调迭代是一种非常有效的方法 (参见 [17], [18]). 将该方法应用于具有变动时刻的脉冲微分系统，近年来也获得了一些结果 (参见 [14], [15], [19], [20]). 由于变动时刻的情况要比固定时刻的情况复杂得多，许多作者只考虑了脉冲面 $t=\tau(x)$ 严格单调这一特殊情况，并且利用单调迭代方法只得到了 $t=\tau(x)$ 严格单增时极小解的存在性，$t=\tau(x)$ 严格单减时极大解的存在性.

本节我们仍考虑变动时刻一阶脉冲微分系统的周期边值问题. 首先我们在没有 $t=\tau(x)$ 的单调性的条件下建立了一个一般的比较原理，然后在假设存在上、下解的条件下得到了关于线性脉冲微分系统解的单调迭代序列，最后证明了它们分别收敛于一阶脉冲微分系统周期边值问题的极小解和极大解. 我们的结果是 [15] 中结果的严格改进.

1. 预备知识和比较结果

考虑如下具有变动时刻的脉冲微分方程的周期边值问题 (PBVP):

$$\begin{cases} x'=f(t,x), & t\neq\tau(x), t\in J,\\ \Delta x=I(x), & t=\tau(x),\\ x(0)=x(T), \end{cases} \tag{4.1.1}$$

其中 $J=[0,T]$, $f\in C[J\times R,R]$, $\tau\in C^1[R,(0,T)]$, $I\in C^1[R,R]$. 令 $h(x)=x+I(x)$. S 表示脉冲面 $t=\tau(x)$. 下面是两个与 (4.1.1) 相联系的初值问题:

$$\begin{cases} x' = f(t,x), & t \neq \tau(x), t \in J, \\ \Delta x = I(x), & t = \tau(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.1.2}$$

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

首先列出两个基本引理.

引理 4.1.1([17])　假设 w, v 分别为 (4.1.3) 在 $J_0 = [0, t_0]$ 上的上、下解，且当 $x \geqslant y (x, y \in R)$ 时有

$$f(t,x) - f(t,y) \leqslant L(x-y), \qquad t \in J_0, \tag{4.1.4}$$

其中 $L > 0$ 是一个常数. 则 $w(t) \geqslant v(t), t \in J_0$.

引理 4.1.2([18])　假设

(H_1) $\tau'(x)f(t,x) < 1$, $(t,x) \in J \times R$;

(H_2) $\tau'(x + sI(x))I(x) \leqslant 0$, $s \in [0,1]$, $x \in R$,

则 (4.1.2) 的任意解 $x(t)$ 与脉冲面 S 恰好相遇一次.

引理 4.1.3　设条件 (H_2) 成立

(1) 若 $y_1 > x_1$ 且 $\tau(y_1) < \tau(x_1)$, 则 $h(y_1) > x_1$;

(2) 若 $y_1 < x_1$ 且 $\tau(y_1) < \tau(x_1)$, 则 $h(y_1) < x_1$.

证明　我们只给出 (1) 的证明，(2) 的证明类似. 反证，若有 $h(y_1) \leqslant x_1$, 由于 $y_1 > x_1$, 则 $I(y_1) < 0$. 利用 (H_2) 可得

$$\tau'(y_1 + sI(y_1)) \geqslant 0,\ 0 \leqslant s \leqslant 1 \text{ 或者 } \tau'(x) \geqslant 0, x \in [x_1, y_1].$$

因此 $\tau(y_1) \geqslant \tau(x_1)$, 矛盾. 这样就完成了引理 4.1.3 的证明. □

引理 4.1.4　设 $x(t)$ 为一个连续函数满足当 $t \in [t_1, t_2)$ 时，$t < \tau(x(t))$, 其中 $t_2 = \tau(x(t_2))$, $[t_1, t_2] \subset J$, 则对满足 $\tau(x(t_1)) > t_1 \geqslant \tau(y_1)$ 的 y_1 有 $[y_1 - x(t_1)][y_1 - x(t_2)] > 0$.

证明　只考虑 $y_1 > x(t_1)$ 的情况，其余情况类似. 反证，若有 $y_1 \leqslant x_2 = x(t_2)$. 因为 $\tau(y_1) \leqslant t_1 < t_2 = \tau(x_2)$, 所以 $y_1 < x_2$. 定义

$$\rho(t) = y_1 - x(t), \qquad t \in [t_1, t_2].$$

由于 $x(t)$ 是连续的，故 $\rho(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 上连续. 注意到 $\rho(t_1) = y_1 - x(t_1) > 0$, $\rho(t_2) = y_1 - x_2 < 0$, 因此存在 $t^* \in (t_1, t_2)$, 使得 $\rho(t^*) = 0$, 亦即 $y_1 = x(t^*)$.

因为 $t_1 < \tau(x(t_1))$, $\tau(x(t^*)) = \tau(y_1) \leqslant t_1 < t^*$, 则存在 $t_0 \in (t_1, t_*)$ 满足 $t_0 = \tau(x(t_0))$, 这与当 $t \in [t_1, t_2]$ 时 $t < \tau(x(t))$ 矛盾. 这样就完成了引理 4.1.4 的证明. □

现在假设 $w(t)$ 和 $v(t)$ 分别为 (4.1.2) 在 J 上的上、下解, 并且在 J 上只与脉冲面 S 相遇一次, 即

$$\begin{cases} w' \geqslant f(t,w), & t \neq \tau(x), \\ \Delta w \geqslant I(w), & t = \tau(x), \\ w(0) \geqslant x_0, \end{cases} \tag{4.1.5}$$

$$\begin{cases} v' \leqslant f(t,v), & t \neq \tau(x), \\ \Delta v \leqslant I(v), & t = \tau(x), \\ v(0) \leqslant x_0. \end{cases} \tag{4.1.6}$$

我们有下面的比较结果.

定理 4.1.1 假设 (H_1), (H_2) 和 (4.1.4) 成立, 并且 $w(t)$, $v(t)$ 分别满足 (4.1.5) 和 (4.1.6). 进一步假设

(H_3) (i) $h(x)$ 是单调增加的;

(ii) $\tau'(x)f(t,h(x)) < h'(x)$, $(t,x) \in J \times R$,

则 $w(t) \geqslant v(t)$, $t \in J$.

证明 为方便起见, 记

$$\begin{aligned} &t_1 = \tau(w(t_1)), s_1 = \tau(v(s_1)),\ w_1 = w(t_1),\ v_1 = v(s_1), \\ &w_1^+ = w(t_1 + 0), v_1^+ = v(s_1 + 0),\ t_1, s_1 \in (0, T), \end{aligned}$$

则

$$t < \tau(w(t)), \qquad t \in [0, t_1);\ t > \tau(w(t)),\ t \in (t_1, T]; \tag{4.1.7}$$

$$t < \tau(v(t)), \qquad t \in [0, s_1);\ t > \tau(v(t)),\ t \in (s_1, T]. \tag{4.1.7$'$}$$

不失一般性, 假设 $t_1 < s_1$. 由引理 4.1.1 容易看出 $w(t) \geqslant v(t)$, $t \in [0, t_1]$. 由于 $w_1 \geqslant v(t_1)$ 并且 $t_1 = \tau(w(t_1)) < \tau(v(t_1))$, 我们有 $w_1 > v(t_1)$. 由引理 4.1.3, 我们知道 $h(w_1) > v(t_1)$.

从 (4.1.5) 知道 $w_1^+ \geqslant h(w_1) > v(t_1)$. 因此由引理 4.1.1 可得 $w(t) \geqslant v(t)$, $t \in [0, s_1]$. 下面只需证明 $w(s_1) \geqslant v_1^+$. 反之, 若 $w(s_1) < v_1^+$, 定义

$$H(x) = w(\tau(x)) - h(x), \tag{4.1.8}$$

$$A = \{y \geqslant v_1 | H(x) < 0, t_1 < \tau(x) < T, x \in [v_1, y]\}.$$

由 (4.1.8) 和 $w(s_1) < v_1^+$, 我们有

$$H(v_1) = w(s_1) - h(v_1) \leqslant w(s_1) - v_1^+ < 0.$$

利用 $w(\tau(x))$ 的连续性, 我们知道 $A \neq \varnothing$ 和 $a = \sup A$ 有确切定义. 因此, $A = [v_1, a)$.

由 $w(t_1) \geqslant v(t_1)$ 和 $\tau(w(t_1)) = t_1 < \tau(v(t_1))$, 我们知道 $w(t_1) > v(t_1)$. 利用引理 4.1.4, 可得 $w_1 > v_1$. 从 $\tau(w_1) = t_1$ 可知 $w_1 \overline{\in} A$, 因此, $w_1 \geqslant a$.

以下分两种情况来得出矛盾.

情形 1. $\tau(a) = t_1$ 且 $H(a) < 0$.

由于当 $x \in A$ 时有 $\tau(x) \in (t_1, T)$. 利用 (H_3) 和 $w_1 \geqslant a$ 有 $w_1^+ \geqslant h(w_1) \geqslant h(a)$. 再利用 $w(\tau(x))$ 在 $[v_1, a)$ 上的连续性, 可得

$$\begin{aligned} 0 > H(a) &= \lim_{x \to a-0} H(x) = \lim_{x \to a-0} w(\tau(x)) - h(a) \\ &= \lim_{t \to t_1+0} w(t) - h(a) = w_1^+ - h(a) \geqslant 0, \end{aligned}$$

这是一个矛盾.

情形 2. $\tau(a) \geqslant t_1$ 且 $H(a) = 0$.

若 $\tau(a) > t_1$, 注意到 $\tau(w_1) = t_1$, 则必有 $w_1 > a$. 利用 $t_1 = \tau(w_1) < \tau(a)$, $w_1 > a$ 和引理 4.1.3, 可得

$$w(t_1 + 0) = w_1^+ \geqslant h(w_1) > a. \tag{4.1.9}$$

因为 $H(a) = 0$, 我们有 $w(\tau(a)) - a = h(a) - a = I(a)$.

若 $I(a) \leqslant 0$, 利用 $w(t)$ 在 $[t_1, \tau(a)]$ 上的连续性和 (4.1.7), 存在 $t^* \in (t_1, \tau(a)]$ 满足 $w(t^*) = a$, 即 $\tau(w(t^*)) = \tau(a) \geqslant t^*$, 这与 (4.1.7) 矛盾.

这样只有 $I(a) > 0$. 由 (H_2), 这意味着 $\tau'(a) \leqslant 0$. 利用 $w(t)$ 的定义和 $H(a) = 0$ 及条件 (H_3) 可知

$$H'(a) \leqslant \tau'(a) f(\tau(a), h(a)) - h'(a) < 0. \tag{4.1.10}$$

再利用 $H(x)$ 和 a 的定义, 我们知道

$$H'(a) \geqslant 0, \tag{4.1.11}$$

这明显与 (4.1.10) 矛盾.

若 $\tau(a) = t_1$, 注意到在 $[v, a)$ 上, $\tau(x) > t_1$, 我们有 $\tau'(a) \leqslant 0$. 然后利用 (4.1.10) 和 (4.1.11), 可以得出矛盾. □

注 4.1.1 若 $x(t)$ 为 (4.1.2) 的一个解, 则 $x(t)$ 同时为 (4.1.2) 的上解和下解. 因此利用定理 4.1.1 可知在 J 上有 $v(t) \leqslant x(t) \leqslant w(t)$.

注 4.1.2 在定理 4.1.1 中, 我们没有要求 $\tau(x)$ 具有任何单调性. 因此, 这里严格改进了由 V.Laksmikantham 和 S.Kaul 在文献 [14], [15], [19], [20] 中得出的比较结果.

2. 单调迭代方法

下面利用单调迭代技巧讨论 (4.1.1) 的极解的存在性. 设 $w(t), v(t)$ 分别为 (4.1.1) 的上、下解，即 (4.1.5)~(4.1.6) 成立并且 $w(0) \geqslant w(T)$, $v(0) \leqslant v(T)$. 还设它们在 J 上与脉冲面 S 只相遇一次. 进一步，我们给出下列假设:

(A_1) $w(t) \geqslant v(t)$, $t \in J$.

(A_2) 存在 $M > 0$, 满足对任意 $(t, x) \in J \times [v(t), w(t)]$, 有

(1) $\tau'(x)[f(t, w(t)) - Mx + Mw(t)] < 1$;

(2) $\tau'(x)[f(t, v(t)) - Mx + Mv(t)] < 1$.

(A_3) 当 $x \geqslant y$ 且 $x, y \in [\underline{v}, \bar{w}]$ 时有 $f(t, x) - f(t, y) \geqslant -M(x - y)$, 其中

$$\underline{v} = \inf\{v(t) : t \in J\}, \overline{w} = \sup\{w(t) : t \in J\}.$$

(A_4) 当 $x \in [\underline{v}, \bar{w}]$ 且 $s \in [0, 1]$ 时, $\tau'(x + sI(x))I(x) \leqslant 0$.

(A_5) $h'(x) + MI(x)\tau'(x) \geqslant 1$, $x \in [\underline{v}, \bar{w}]$, 并且 $h(x)$ 在 $[\underline{v}, \bar{w}]$ 上是单调增加的.

定义

$$F_z(t,\ x) = f(t, z(t)) - Mx + Mz(t), \tag{4.1.12}$$

其中 $z \in [v, w] = \{x \in PC^1[J] : v(t) \leqslant x(t) \leqslant w(t),\ t \in J\}$.

引理 4.1.5 设条件 (A_1) ~(A_5) 满足，则如下系统

$$\text{(IDE)}\begin{cases} x' = F_z(t, x), & t \neq \tau(x), \\ \Delta x = I(x), & t = \tau(x),\ t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \in [v(0),\ w(0)] \end{cases} \tag{4.1.13}$$

的任意解 $x(t)$ 与脉冲面 S 只相遇一次并且满足

$$v(t) \leqslant x(t) \leqslant w(t), \qquad t \in J.$$

证明 因为当 $t \in J$ 时, $v(t) \leqslant z(t) \leqslant w(t)$, 结合 ($A_3$) 可得

$$F_v(t, x) \leqslant F_z(t,\ x) \leqslant F_w(t,\ x). \tag{4.1.14}$$

利用 (A_2) 和 (4.1.14), 我们知道对任意 $(t, x) \in J \times [v(t), w(t)]$, 有 $\tau'(x)F_z(t, x) < 1$.

再由 (A_5) 可知

$$\tau'(x)F_z(t, h(x)) = \tau'(x)[F_z(t, x) - MI(x)] < 1 - MI(x)\tau'(x) \leqslant h'(x).$$

利用与定理 4.1.1 相同的证明方法，容易得出结论成立. □

定理 4.1.2 假设条件 (A_1) ~(A_5) 成立，则存在 (4.1.1) 的下解序列 $\{v_n(t)\}$ 和上解序列 $\{w_n(t)\}$ 分别一致收敛于 (4.1.1) 的解 $\alpha(t)$, $\beta(t)$. 进一步，如果 $x(t)$ 是 (4.1.1) 的解并满足 $x(t) \in [v(t), w(t)]$, 则在 J 上, $\alpha(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta(t)$.

证明　考虑线性初值问题 (4.1.13), 用 $A(z, x_0)$ 表示 (4.1.13) 的解并且令

$$v_1 = A(v, v(T)), v_2 = A(v_1, v_1(T)), \cdots, v_n = A(v_{n-1}, v_{n-1}(T)), \cdots,$$

$$w_1 = A(w, w(T)), w_2 = A(w_1, w_1(T)), \cdots, w_n = A(w_{n-1}, w_{n-1}(T)), \cdots,$$

则由引理 4.1.5 和定理 4.1.1 可知 $v_1, w_1 \in [v, w]$ 并且

$$v_1(t) \leqslant w_1(t), \qquad t \in J. \tag{4.1.15}$$

因此

$$v(0) \leqslant v(T) \leqslant v_1(T) \leqslant w_1(T) \leqslant w(T) \leqslant w(0). \tag{4.1.16}$$

同理可得 $v_2, w_2 \in [v, w]$ 并且

$$v \leqslant v_1 \leqslant v_2 \leqslant w_2 \leqslant w_1 \leqslant w.$$

利用数学归纳法可以证明

$$v(t) \leqslant v_1(t) \leqslant \cdots \leqslant v_n(t) \leqslant \cdots \leqslant w_n(t) \leqslant \cdots \leqslant w_1(t) \leqslant w(t), \qquad t \in J, \tag{4.1.17}$$

$$v_n(0) = v_{n-1}(T) \leqslant w_{n-1}(T) = w_n(0). \tag{4.1.18}$$

令

$$\alpha(t) = \lim_{t \to \infty} v_n(t), \quad \beta(t) = \lim_{t \to \infty} w_n(t), \qquad t \in J.$$

下面我们证明 $\alpha(t)$ 为 (4.1.1) 的一个解. 由引理 4.1.5 可知 $v_n(t), w_n(t)$ 与脉冲面 S 只相遇一次. 令

$$t_n = \tau(v_n(t_n)), \tag{4.1.19}$$

则 $v_n \in C^1\{(0, t_n]\} \cup \{(t_n, T]\}$, 并且

$$v_n(t) - v_n(0) = \begin{cases} \int_0^t F_{v_{n-1}}(s, v_n(s))ds, & t \in [0, t_n]; \\ I(v_n(t)) + \int_0^t F_{v_{n-1}}(s, v_n(s))ds, & t \in (t_n, T]. \end{cases} \tag{4.1.20}$$

因为 $\{t_n\}$ 是有界的，故存在 $\{t_n\}$ 的子列 $\{t_{n_k}\}$ 满足

$$t_{n_k} \to t^* > 0, \qquad k \to \infty. \tag{4.1.21}$$

利用 (4.1.18) 和勒贝格控制收敛定理，容易看出

$$\alpha(t) - \alpha(0) = \int_0^t f(s, \alpha(s))ds, \qquad t \in (0, t^*). \tag{4.1.22}$$

由于

$$v_{n_k}(t_{n_k}) - v_{n_k}(0) = \int_0^{t_{n_k}} F_{v_{n_k-1}}(s, v_{n_k}(s))ds,$$

结合 $F_{v_{n-1}}(t, v_n(t))$ 的有界性可得

$$\lim_{k\to\infty} v_{n_k}(t_{n_k}) = \alpha(0) + \int_0^{t^*} f(s, \alpha(s))ds = \alpha(t^*). \tag{4.1.23}$$

注意到

$$v_{n_k}(t_{n_k}+0) - v_{n_k}(0) = I(v_{n_k}(t_{n_k})) + \int_0^{t_{n_k}} F_{v_{n_k-1}}(s, v_{n_k}(s))ds,$$

因此

$$\lim_{k\to\infty} v_{n_k}(t_{n_k}+0) = \alpha(0) + I(\alpha(t^*)) + \int_0^{t^*} f(s, \alpha(s))ds. \tag{4.1.24}$$

再利用 (4.1.22) 就有

$$\alpha(t) = \alpha(0) + I(\alpha(t^*)) + \int_0^{t} f(s, \alpha(s))ds, \qquad t \in (t^*, T].$$

为了证明 $\alpha(t)$ 为 (4.1.1) 的一个解，我们只需证明:

(i) $\alpha(0) = \alpha(T)$;

(ii) $t^* = \tau(\alpha(t^*))$;

(iii) 若 $t \neq t^*$ $(t \in J)$, 则 $t \neq \tau(\alpha(t))$.

事实上， (i) 可以从 (4.1.18) 得到， (ii) 可以从 $t_{n_k} = \tau(v_{n_k}(t_{n_k}))$ 和 (4.1.21), (4.1.23) 得到. 至于 (iii), 利用 $\alpha \in [v, w]$ 和 (A_3) 可得

$$F_w(t, \alpha) \leqslant F_\alpha(t, \alpha) = f(t, \alpha) \leqslant F_v(t, \alpha),$$

结合 (A_2) 意味着 $\tau'(\alpha(t))f(t, \alpha(t)) < 1$.

令

$$\rho(t) = t - \tau(\alpha(t)), \qquad t \in J,$$

那么

$\rho'(t) = 1 - \tau'(\alpha(t))f(t, \alpha(t)) > 0(t \neq t^*)$, 并且 $\rho(t^*) = 0$, 因此当 $t \neq t^*$ 时有 $t \neq \tau(\alpha(t))$.

完全类似地， $\beta(t)$ 为 (4.1.1) 的一个解. 进一步，若 $x(t)$ 为 (4.1.1) 满足 $x(t) \in [v(t), w(t)]$ 的一个解，利用常规方法，可以证明当 $t \in J$ 时， $\alpha(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta(t)$. 这样就完成了定理 4.1.2 的证明. □

注 4.1.3 定理 4.1.2 严格改进了文献 [15] 中的定理 2.1~2.2, 因为我们没有要求 $\tau(x)$ 的单调性，并且同时证明了 (4.1.1) 的最大解和最小解的存在性.

§4.2　二阶脉冲微分系统的边值问题

1. 有限区间上二阶脉冲微分系统的边值问题

目前，已有文献中，关于有限区间上二阶脉冲微分系统的边值问题的研究较多. 但就解的存在性方面，所用方法，不外乎单调迭代方法和不动点方法. 利用单调迭代方法的内容可参见 [8] 中的第 4 章 4.4 节. 在这里，更广泛地，考虑抽象空间中奇异的情形. 对纯量空间中或非奇异的情况，结论同样成立且条件可简化很多，具体情况下我们都做了说明. 抽象空间常微分方程理论是微分方程理论中一个新的重要分支 ([6]~[10]). 近年来. 常微分方程奇异边值问题的研究日趋活跃，对抽象空间奇异边值问题的研究，尤其是带奇异性的具脉冲作用的边值问题正解的存在性，迄今还很少有人研究. 本部分首先利用锥理论和 H.Mönch 不动点定理，讨论了 Banach 空间中一类带奇异性的具有脉冲作用的边值问题正解的存在性，并给出了其在无穷维带脉冲奇异微分方程组中的应用，然后利用锥拉伸与锥压缩不动点定理讨论了这类边值问题正解的存在性及多解的存在性，并给出例子说明我们的条件是合理的.

设 $(E, \|.\|)$ 是实 Banach 空间，令 $J = [0,1], 0 < t_1 < \cdots < t_m < 1$,

$PC[J,E] = \{x|x : J \to E, x(t)$ 在 $t \neq t_k$ 处连续，在 $t = t_k$ 处左连续且右极限存在 $\}$,

$PC^1[J,E] = \{x|\ x \in PC[J,E]$ 且 $x' \in PC[(0,1),E]\}$.

容易看出 $PC[J,E]$ 在范数 $\|x\|_{PC} = \sup\limits_{t\in J}\|x(t)\|$ 下成为一 Banach 空间.

设 P 为 E 中一个锥，它引入了 E 中一个偏序关系 “$\leqslant$”， $x \leqslant y$ 当且仅当 $y - x \in P$. 同样可由 P 引入 $PC[J,E]$ 中一个偏序，$x, y \in PC[J,E]$. “$x \leqslant y$” 当且仅当对 $\forall t \in J$, $x(t) \leqslant y(t)$. 关于锥及和锥有关的概念及性质，请读者参阅 [6]~[7].

我们考虑二阶脉冲奇异边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p(t)}(p(t)x'(t))' + q(t)f(t,x(t)) = \theta, & t \in (0,1), t \neq t_k, \\ \Delta x = x(t_k+0) - x(t_k-0) = I_k(x(t_k)), & t = t_k, \\ \Delta x' = x'(t_k+0) - x'(t_k-0) = -H_k(x(t_k)), & t = t_k, k = 1,2,\cdots,m, \\ x(0) = \theta = \lim\limits_{t\to 1-0} p(t)x'(t) & \end{cases} \tag{4.2.1}$$

正解的存在性，其中 $q(t)$ 可能在 $t = 0$ 和 $t = 1$ 点附近有奇异性，即 $q(t)$ 可能在 $t = 0$ 和 $t = 1$ 的某小邻域内无界； $p \in C[[0,1], R^+]$ 且在 $(0,1)$ 上 $p(t) > 0$, $q \in C[(0,1), R^+]$ 且在 $(0,1)$ 上 $q(t) \neq 0$, $R^+ = [0, +\infty)$, $f \in C[J \times P, P]$, I_k, $H_k \in C[P,P]$, $k = 1,2,\cdots,m$.

以下谈到问题 (4.2.1) 的解是指 $x \in PC[J,E]$, $px' \in PC^1[(0,1),E]$ 并且 x 满足边值问题 (4.2.1), 正解是指非负且非平凡解, 即 $x \in PC[J,P]$ 且 $x(t) \not\equiv \theta$, $t \in J$, 并令 $J_0 = [0,t_1]$, $J_k = (t_k, t_{k+1}]$, $k = 1,\cdots,m$, $t_{m+1} = 1$.

设 $x(t)$: $(0,1) \to E$ 连续, 如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 x(t)dt$ 存在, 则称抽象广义积分 $\int_0^1 x(t)dt$ 收敛, 类似可定义其他各种广义积分的敛散性.

令 $T_r = \{x \in E\colon \|x\| \leqslant r\}$, $B_r = \{x \in PC[J,E] : \|x\|_{PC} \leqslant r\}$ $(r > 0)$. 对于 $D \subset PC[J,E]$, 记 $D(t) = \{x(t) : x \in D\} \subset E$ $(t \in J)$. α 表示 Kuratowski 非紧性测度, 有关非紧性测度的定义及性质参见 [6], [7].

下面给出几个引理:

引理 4.2.1[9] 设 $V = \{x_n\} \in L[I,E]$, 且存在 $g \in L[I,R^+]$ 使对一切 $x_n \in V$, $\|x_n(t)\| \leqslant g(t)$, a.e. $t \in J$, 则

$$\alpha\left(\left\{\int_a^t x_n(s)ds : n \in N\right\}\right) \leqslant 2\int_a^t \alpha(V(s))ds, \qquad t \in I,$$

这里 $I = [a,b]$.

引理 4.2.2[9](Mönch 不动点定理) 设 E 为 Banach 空间, $K \subset E$ 为闭凸集, $F : K \to K$ 为连续映射, 若对某一 $x \in K$, 有 $C \subset K$ 可数且 $\overline{C} \subset \overline{co}(\{x\} \cup F(C))$ 蕴含着 C 是相对紧集, 则 F 在 K 中有一个不动点.

以下两引理亦见文献 [9].

引理 4.2.3 设 $D \subset PC[J,E]$ 有界且在每一集 $J_k (k = 0,1,\cdots,m)$ 上等度连续, 则 $\alpha(D) = \sup\limits_{t \in J} \alpha(D(t))$.

引理 4.2.4 设 P 为 E 中一个锥, $P_{r,s} = \{x \in P\colon r \leqslant \|x\| \leqslant s\}$ 且 $s > r > 0$. 设 A: $P_{r,s} \to P$ 为严格集压缩算子并满足下面两条之一,

(i) 当 $x \in P$, $\|x\| = r$ 时 $Ax \not\leqslant x$ 且当 $x \in P$, $\|x\| = s$ 时, $Ax \not\geqslant x$;

(ii) 当 $x \in P$, $\|x\| = r$ 时 $Ax \not\geqslant x$ 且当 $x \in P$, $\|x\| = s$ 时, $Ax \not\leqslant x$,

则 A 在锥 P 中有一不动点 x, 满足 $r < \|x\| < s$.

为方便起见, 先列出下列条件:

(A$_1$) 对 $\forall r > 0$. f 在 $J \times (T_r \cap P)$ 上有界, 且对 $\forall s \in J$, $\forall D \subset B_r \cap P$ 有 $\alpha(f(s,D(s))) \leqslant N\alpha(D(s))$; 对 $\forall D \subset T_r \cap P$ 有 $\alpha(H_k(D)) \leqslant N_k\alpha(D)$, $\alpha(I_k(D)) \leqslant L_k\alpha(D)$, $k = 1,2,\cdots,m$, 其中 N, N_k. $L_k (k = 1,2,\cdots,m)$ 为非负常数.

(A$_2$) $\int_0^1 \frac{1}{p(s)} \int_s^1 p(\tau)q(\tau)d\tau ds < +\infty$. $\int_0^1 \frac{1}{p(s)} ds < +\infty$ 且

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{p(s)} \int_s^1 p(\tau)q(\tau)d\tau ds\right) \cdot c + \left(\int_0^1 \frac{1}{p(s)} ds\right) \sum_{k=1}^m c_k + \sum_{k=1}^m d_k < 1,$$

其中

$$c = \overline{\lim_{\|x\| \to +\infty}} \sup_{s \in [0,1]} \frac{\|f(s,x)\|}{\|x\|}, \qquad d_k = \overline{\lim_{\|x\| \to +\infty}} \frac{\|I_k(x)\|}{\|x\|},$$

$$c_k = \overline{\lim_{\|x\| \to +\infty}} \frac{\|H_k(x)\|}{\|x\|}, \qquad k = 1, 2, \cdots, m.$$

$$(\mathrm{A}_3) \int_0^1 \frac{4N}{p(s)} \int_s^1 p(\tau)q(\tau)d\tau ds + \int_0^1 \frac{2}{p(s)} \left(\sum_{k=1}^m N_k p(t_k) \right) ds + \sum_{k=1}^m L_k < 1,$$

其中 N, N_k, L_k 如 (A_1) 所述.

(A_4) 存在 $x_0 \in P \setminus \{\theta\}$, $J_0 = [a_0, b_0] \subset J$ 和 $h \in C[J_0, R^+]$ 使当 $t \in J_0$, $x \geqslant x_0$ 时有 $f(t,x) \geqslant h(t)x_0$ 成立，且

$$\int_0^{a_0} \frac{1}{p(s)} \int_{a_0}^{b_0} p(\tau)q(\tau)h(\tau)d\tau ds \geqslant 1.$$

定理 4.2.1 假设 (A_1) $\sim$$(\mathrm{A}_4)$ 成立，则系统 (4.2.1) 至少存在一个正解 $x \in PC[J,P]$, 满足当 $t \in [a_0, b_0]$ 时，有 $x(t) \geqslant x_0$ 成立.

证明 本定理的证明分如下五步：

第一步：问题的转化.

考虑如下的带脉冲的积分算子：

$$\begin{aligned}(Ax)(t) = &\int_0^t \frac{1}{p(s)} \int_s^1 p(\tau)q(\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau ds \\ &+ \int_0^t \left(\sum_{s \leqslant t_i < 1} p(t_i)H_i(x(t_i)) \right) \frac{1}{p(s)} ds + \sum_{0 < t_i < t} I_i(x(t_i)).\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

显然 A: $PC[J,P] \to PC[J,P]$, 并且容易推得 (4.2.1) 有满足当 $t \in J_0$ 时，$x(t) \geqslant x_0$ 的正解等价于 A 在 $PC[J,P]$ 中有满足条件：当 $t \in J_0$ 时 $x(t) \geqslant x_0$ 的不动点.

第二步：证明对 $\forall r > 0$, A 为映 $B_r \cap PC[J,P]$ 入 $PC[J,P]$ 的连续有界算子.

由 (A_1), (A_2) 很容易推得 A 为从 $B_r \cap PC[J,P]$ 入 $PC[J,P]$ 的有界算子，下面说明连续性.

设 x_n, $x \in B_r \cap PC[J,P]$ 且 $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n - x\|_{PC} = 0$, 由 (A_1) $\sim$$(\mathrm{A}_3)$ 容易推出 $\{(Ax_n)(t)\}$ 在每个 $J_i = (t_{i-1}, t_i]$ 上等度连续 $(i = 1, 2, \cdots, m+1, t_0 = 0, t_{m+1} = 1)$. 另一方面由勒贝格控制收敛定理得

$$\|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| \leqslant \int_0^t \frac{1}{p(s)} \int_s^1 p(\tau)q(\tau)\|f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x(\tau))\|d\tau ds$$

$$+\int_0^t \left(\sum_{s\leqslant t_i<1} p(t_i)\|H_i(x_n(t_i)) - H_i(x(t_i))\| \right) \frac{1}{p(s)} ds$$
$$+ \sum_{0<t_i<t} \|I_i(x_n(t_i)) - I_i(x(t_i))\| \to 0, \qquad n \to +\infty.$$

这样由 Ascoli-Arezela 定理知 $\{Ax_n\}$ 在 $PC[J,P]$ 中相对紧. 下面说明 $\|Ax_n - Ax\|_{PC} \to 0(n \to +\infty)$.

事实上, 若不成立, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$ 满足 $\|Ax_{n_i} - Ax\|_{PC} \geqslant \varepsilon_0 (i = 1, 2, \cdots)$.

由于 $\{Ax_n\}$ 相对紧, 故存在 $\{Ax_{n_i}\}$ 的子列在 $PC[J,P]$ 中收敛于某 $y \in PC[J,P]$. 不失一般性, 仍设 $\lim\limits_{i\to+\infty} Ax_{n_i} = y$, 即 $\lim\limits_{i\to+\infty} \|Ax_{n_i} - y\|_{PC} = 0$, 这样 $y = Ax$, 矛盾. 故 A 连续.

第三步: 证明存在充分大的 $R > 0$, 使得算子 A 映 $B_R \cap PC[J,P]$ 入 $B_R \cap PC[J,P]$, 这里 $B_R = \{x \in PC[J,E] : \|x\|_{PC} \leqslant R\}$.

取 $c' > c$, $c_k' > c_k$ 和 $d_k' > d_k$ 使得

$$b =: \left(\int_0^1 \frac{1}{p(s)} \int_s^1 p(\tau)q(\tau)d\tau ds \right) \cdot c' + \left(\int_0^1 \frac{1}{p(s)} ds \right) \sum_{k=1}^m c_k' + \sum_{k=1}^m d_k' < 1, \quad (4.2.3)$$

由条件 (A_2) 知, 存在 $r > 0$, 使当 $\|x\| \geqslant r$, $s \in J$ 时, 有

$$\|f(s,x)\| < c'\|x\|, \ \|I_k(x)\| < d_k'\|x\|, \ \|H_k(x)\| < c_k'\|x\|, \qquad k = 1, 2, \cdots, m. \quad (4.2.4)$$

因此有

$$\|f(s,x)\| < c'\|x\| + M, \qquad x \in P, s \in J, \quad (4.2.5)$$

$$\|I_k(x)\| < d_k'\|x\| + M, \ \|H_k(x)\| < c_k'\|x\| + M, \qquad k = 1, 2, \cdots, m, \quad (4.2.6)$$

其中 $M = \max\left\{ \sup\limits_{s\in J, x\in T_r} \|f(s,x)\|, \ \sup\limits_{x\in T_r} \|I_k(x)\|, \ \sup\limits_{x\in T_r} \|H_k(x)\| : k = 1, 2, \cdots, m \right\}$.

令 $R = (1-b)^{-1}G + \|x_0\|$, 其中 $G = M\left[\int_0^1 \frac{1}{p(s)} \int_s^1 p(\tau)q(\tau)d\tau ds + \left(\int_0^1 \frac{1}{p(s)} ds \right) \left(\sum\limits_{k=1}^m p(t_k) + m \right) \right]$. 下面证明 R 即满足要求.

对 $\forall x \in B_R \cap PC[J,P]$, 即 $\|x\|_{PC} \leqslant R$, 由 (4.2.2), (4.2.5) 和 (4.2.6) 知

$$
\begin{aligned}
\|(Ax)(t)\| = & \left(\int_0^1 \frac{1}{p(s)} \int_s^1 p(\tau)q(\tau)d\tau ds(c'\|x\|_{PC} + M)\right) \\
& + \left(\int_0^1 \frac{1}{p(s)} ds\right)\left(\sum_{k=1}^m p(t_k)(c_k'\|x\|_{PC} + M)\right) + \sum_{k=1}^m (d_k'\|x\|_{PC} + M) \\
& = b\|x\|_{PC} + G \leqslant bR + G = \frac{b}{1-b}G + b\|x_0\| + G \\
& \leqslant \frac{1}{1-b}G + \|x_0\| = R.
\end{aligned}
$$

故 A: $B_R \cap PC[J,P] \to B_R \cap PC[J,P]$. 结合第二步的证明知 A 为映 $B_R \cap PC[J,P]$ 入 $B_R \cap PC[J,P]$ 的连续有界算子.

第四步：证明存在 $B_R \cap PC[J,P]$ 中的有界闭凸集 F, 使得 A 映 F 入 F.

令 $F = \{x \in PC[J,P] : \|x\|_{PC} \leqslant R$, 且当 $t \in J_0$ 时，$x(t) \geqslant x_0\}$, x_0 如 (A_4) 所述. 显然由于 $x_0 \in F$, 故 $F \neq \varnothing$ 且为有界凸闭集. 下面说明 $A(F) \subset F$.

由第三步的证明知对 $\forall x \in F$, $\|x\|_{PC} \leqslant R$ 有 $Ax \in PC[J,P]$ 且 $\|Ax\|_{PC} \leqslant R$. 另外，由 (A_4) 可知

$$
\begin{aligned}
(Ax)(t) = & \int_0^t \frac{1}{p(s)} \int_s^1 p(\tau)q(\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau ds \\
& + \int_0^t \left(\sum_{s \leqslant t_i < 1} p(t_i)H_i(x(t_i))\right) \frac{1}{p(s)} ds + \sum_{0<t_i<t} I_i(x(t_i)) \\
\geqslant & \int_0^{a_0} \frac{1}{p(s)} \int_s^1 p(\tau)q(\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau ds \\
\geqslant & \int_0^{a_0} \frac{1}{p(s)} \int_{a_0}^{b_0} p(\tau)q(\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau ds \\
\geqslant & \int_0^{a_0} \frac{1}{p(s)} \int_{a_0}^{b_0} p(\tau)q(\tau)h(\tau)x_0 d\tau ds \geqslant x_0, \qquad \forall t \in J_0. \qquad (4.2.7)
\end{aligned}
$$

所以 $Ax \in F$, 这样 A 为映 F 入 F 的连续有界算子.

第五步：证明若存在可数集 $D \subset F$, 满足 $\bar{D} \subset \overline{co}(\{u\} \cup AD)$, 其中 $u \in F$, 可推出 D 为相对紧集.

设 $D \subset F$ 满足上述条件，易知 $\overline{D(t)} \subset \overline{co}((u(t)) \cup (AD)(t))$, $t \in J$. 再利用非紧

性测度的性质，(A$_3$) 及引理 4.2.1 知

$$\begin{aligned}
\alpha((AD)(t)) = \alpha\Bigg(\Bigg\{ & \int_0^t \frac{1}{p(s)} \int_s^1 p(\tau)q(\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau ds \\
& + \int_0^t \left(\sum_{s\leqslant t_i<1} p(t_i)H_i(x(t_i)) \right) \frac{1}{p(s)} ds + \sum_{0<t_i<t} I_i(x(t_i)) : x \in D \Bigg\}\Bigg) \\
\leqslant\ & \alpha\left(\left\{\int_0^t \frac{1}{p(s)} \int_s^1 p(\tau)q(\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau ds : x \in D\right\}\right) \\
& + \alpha\left(\left\{\int_0^t \left(\sum_{s\leqslant t_i<1} p(t_i)H_i(x(t_i)) \right) \frac{1}{p(s)} ds : x\in D\right\}\right) \\
& + \sum_{0<t_i<t} \alpha(I_i(D(t_i))) \leqslant \int_0^t \frac{4}{p(s)} \int_s^1 p(\tau)q(\tau)\alpha(f(\tau, D(\tau)))d\tau ds \\
& + \int_0^t \frac{2}{p(s)} \left(\sum_{s\leqslant t_i<1} p(t_i)\alpha(H_i(D(t_i))) \right) ds + \sum_{0<t_i<t} \alpha(I_i(D(t_i))) \\
\leqslant\ & \int_0^t \frac{4N}{p(s)} \int_s^1 p(\tau)q(\tau)\alpha(D(\tau))d\tau ds \\
& + \int_0^t \frac{2}{p(s)} \left(\sum_{s\leqslant t_i<1} N_i p(t_i)\alpha(D(t_i)) \right) ds + \sum_{0<t_i<t} L_i\alpha(D(t_i)) \\
\leqslant\ & \int_0^t \frac{4N}{p(s)} \int_s^1 p(\tau)q(\tau)\alpha((AD)(\tau))d\tau ds \\
& + \int_0^t \frac{2}{p(s)} \left(\sum_{s\leqslant t_i<1} N_i p(t_i)\alpha((AD)(t_i)) \right) ds \\
& + \sum_{0<t_i<t} L_i\alpha((AD)(t_i)).
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

由于 AD 有界，且在每一个小区间 $J_k = (t_{k-1}, t_k](k = 1, 2, \cdots, m+1, t_0 = 0, t_{m+1} = 1)$ 上等度连续，定义 $m(t) = \alpha((AD)(t))$. 则由非紧性测度 α 的性质知

$$\begin{aligned}
m(t) \leqslant & \int_0^t \frac{4N}{p(s)} \int_s^1 p(\tau)q(\tau)m(\tau)d\tau ds \\
& + \int_0^t \frac{2}{p(s)} \left(\sum_{s\leqslant t_i<1} N_i p(t_i)m(t_i) \right) ds + \sum_{0<t_i<t} L_i m(t_i)
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

$$\leqslant \int_0^t \frac{4N}{p(s)} \int_s^1 p(\tau)q(\tau)d\tau ds + \int_0^t \frac{2}{p(s)} \left(\sum_{s\leqslant t_i<1} N_i p(t_i)ds + \sum_{0<t_i<t} L_i \right) \sup_{t\in J} m(t). \tag{4.2.10}$$

再由条件 (A_3) 即知 $m(t)\equiv 0, t\in J$, 从而

$$\alpha(D)=\alpha(AD)=\sup_{t\in J}\alpha((AD)(t))=\sup_{t\in J}m(t)=0.$$

故 D 为 F 的相对紧集.

结合上面五步的说明，由引理 4.2.2 即 H.Mönch 不动点定理，知 (4.2.1) 至少存在一个正解 x 满足当 $t\in J_0$ 时，$x(t)\geqslant x_0$. □

注 4.2.1　在纯量空间中，去掉条件 (A_1) 和 (A_3), 结论同样成立. 另外这里我们没有要求 $f(t,x)$ 像一般文献中所要求的一致连续性条件.

注 4.2.2　此处 (A_3) 似乎比较强一些，但为了保证 (4.2.9) 和 (4.2.10) 中的 $m(t)=0$, 即具有紧性，是非常重要的，尤其当条件 (A_3) 不满足时结论就有可能不成立. 如在没有脉冲的情况下，(4.2.9) 即为

$$m(t)\leqslant \int_0^t \frac{4N}{p(s)}\int_s^1 p(\tau)q(\tau)m(\tau)d\tau ds, \tag{4.2.11}$$

取 $N=1, p(t)\equiv 1, q(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, 则 $m(t)=t$ 满足 (4.2.11) 式.

事实上，此时

$$\int_0^t \frac{4N}{p(s)}\int_s^1 p(\tau)q(\tau)m(\tau)d\tau ds = \int_0^t 4\int_s^1 \sqrt{\tau}d\tau ds$$
$$=\frac{8}{3}t(1-\frac{2}{5}t^{\frac{3}{2}})\geqslant t, \qquad t\in J.$$

但 $m(t)=t\neq 0$, 这是由于 $4\displaystyle\int_0^1\int_s^1 \frac{1}{\sqrt{\tau}}d\tau ds=\frac{8}{3}>1$ 的缘故.

例 4.2.1　考虑无穷维奇异微分方程组

$$\begin{cases} x_n''+\dfrac{1}{2t}x_n'+\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}f_n(t,x)=0, & t\in(0,1),\ t\neq\dfrac{1}{2}, \\ \Delta x_n=\dfrac{3}{7}x_n\left(\dfrac{1}{2}\right), & t=\dfrac{1}{2}, \\ \Delta x_n'=-\dfrac{1}{4n}x_n\left(\dfrac{1}{2}\right), & t=\dfrac{1}{2}, \\ x_n(0)=x_n'(1)=0, & n=1,2,3,\cdots, \end{cases} \tag{4.2.12}$$

这里

$$f_n(t,x)=\frac{\sqrt{t}}{n}(1+2t)\sqrt[3]{1+x_{n+1}+x_{2n}^2}-\frac{t}{n^2}\cos(x_n+x_{2n-1}^2).$$

结论 奇异无穷维系统 (4.2.12) 至少有一个非负解 $(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t),\cdots)$, 满足对 $\forall t\in J$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n(t)=0$, 且当 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 时, $x_n(t)\geqslant\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$.

证明 令 $J=[0,1]$, $E=c_0=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots):x_n\to 0(n\to+\infty)\}$, 赋以范数 $\|x\|=\sup\limits_n|x_n|$, $P=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in c_0:x_n\geqslant 0,n\in N\}$, 则 P 为 c_0 中的一个锥. 在 $PC[J,E]$ 中考虑 (4.2.12). 取 $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t),\cdots)$, $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n,\cdots)$, $H(x)=\left(\frac{x_1}{4},\frac{x_2}{8},\cdots,\frac{x_n}{4n},\cdots\right)$, $I(x)=\frac{3}{7}x$, 则 (4.2.12) 转化为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{t}}(\sqrt{t}x')'+\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}f(t,x)=0, & t\in(0,1),t\neq\dfrac{1}{2},\\ \Delta x=I(x), & t=\dfrac{1}{2},\\ \Delta x'=-H(x), & t=\dfrac{1}{2},\\ x(0)=0=x'(1).\end{cases}\tag{4.2.13}$$

将其看成 (4.2.1) 的形式, 相当于 $p(t)=\sqrt{t}$, $q(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$, 只有一个脉冲点 $t=\dfrac{1}{2}$ 的情况.

显然 $f\in PC[J\times P,P]$, 且对 $\forall r>0$, $f(t,x)$ 在 $J\times P_r$ 上有界, $P_r=\{x\in c_0:\|x\|\leqslant r,x\in P\}$, $I(x)$, $H(x)$ 也为连续有界算子. 进一步, 对 $\forall n$, $t\in J$, $x\in P$, 有

$$0\leqslant f_n(t,x)\leqslant\frac{3}{n}\sqrt[3]{1+x_{n+1}+x_{2n}^2}+\frac{1}{n^2}.\tag{4.2.14}$$

下面首先说明对 P 中的任意有界集 B, 有 $f(t,B)$ 在 c_0 中相对紧.

令 $\{x^{(m)}\}\subset P$, $\|x^{(m)}\|\leqslant M=$ 常数 $(m=1,2,3,\cdots)$. 由 (4.2.14) 知 $\{f_n(t,x^{(m)})\}$ 有界, 采用对角线法, 可选取 $\{x^{(m)}\}$ 中的一个子列 $\{x_m^{(m)}\}$ 满足

$$\lim_{m\to+\infty}f_n(t,x_m^{(m)})=y_n,\qquad n=1,2,\cdots.\tag{4.2.15}$$

利用 (4.2.14) 得

$$0\leqslant f_n(t,x_m^{(m)})\leqslant\frac{3}{n}\sqrt[3]{1+M+M^2}+\frac{1}{n^2},$$

所以

$$0\leqslant y_n\leqslant\frac{3}{n}\sqrt[3]{1+M+M^2}+\frac{1}{n^2}.\tag{4.2.16}$$

故对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $n_0>0$, 当 $n>n_0$ 时, 对一切 m, 有

$$0\leqslant f_n(t,x_m^{(m)})<\frac{\varepsilon}{2},\qquad 0\leqslant y_n<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{4.2.17}$$

另一方面，由 (4.2.15) 知，存在正整数 m_0, 满足当 $m > m_0$ 时，有

$$|f_n(t, x_m^{(m)}) - y_n| < \varepsilon, \qquad n = 1, 2, \cdots, n_0. \tag{4.2.18}$$

这样根据 (4.2.17) 和 (4.2.18) 得：当 $m > m_0$ 时，

$$\|f(t, x_m^{(m)}) - y\| = \sup_n |f_n(t, x_m^{(m)}) - y_n| \leqslant \varepsilon,$$

这里 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots)$. 并由 (4.2.16) 知 $y \in P$, 即在 c_0 中有 $f(t, x_m^{(m)}) \to y(m \to +\infty)$. 故对 P 中的任意有界集 B, 有 $f(t, B)$ 在 c_0 中相对紧，这样 (A_1) 与 (A_3) 中的 $N = 0$.

利用同样的方法可以说明对 P 中的任意有界集 B, $H(B)$ 也为相对紧集，即 (A_1) 与 (A_3) 中的 $N_1 = 0$.

很显然， $L_1 = \dfrac{3}{7} < 1$. 故 (A_1) 与 (A_3) 成立.

下面说明 (A_2) 成立，由 (4.2.14) 知

$$c = \overline{\lim_{\|x\| \to +\infty}} \sup_{s \in [0,1]} \frac{\|f(s, x)\|}{\|x\|} = 0, \qquad d_1 = \overline{\lim_{\|x\| \to +\infty}} \frac{\|I(x)\|}{\|x\|} = \frac{3}{7},$$

$$c_1 = \overline{\lim_{\|x\| \to +\infty}} \frac{\|H(x)\|}{\|x\|} = \frac{1}{4}.$$

这样 $\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}\right) \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{7} = \dfrac{13}{14} < 1$, 即 (A_2) 成立.

最后说明 (A_4) 成立，取 $x_0 = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots\right)$, $J_0 = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. 当 $x \in P$ 且 $t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ 时 $f_n(t, x) \geqslant \dfrac{\sqrt{t}}{n} = \dfrac{h(t)}{n}$, 显然更有当 $x \geqslant x_0$, $t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ 时，有 $f(t, x) \geqslant \sqrt{t} x_0$, 而且

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{\sqrt{s}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\tau}{\sqrt{1-\tau}} d\tau = \sqrt{2}(\sqrt{2} - \frac{1}{3\sqrt{2}}) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} > 1.$$

即 (A_4) 亦成立.

利用定理 4.2.1 即知结论成立. □

下面利用锥拉伸与锥压缩不动点定理讨论这类边值问题正解的存在性及多解的存在性. 为简单起见，考虑下述二阶脉冲奇异边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p(t)}(p(t)x'(t))' + f(t, x(t)) = \theta, & t \in (0, 1), t \neq t_k, \\ \Delta x = x(t_k + 0) - x(t_k - 0) = I_k(x(t_k)), & t = t_k, \\ \Delta x' = \theta, \quad k = 1, 2, \cdots, m, \\ x(0) = \theta = \lim\limits_{t \to 1-0} p(t)x'(t) \end{cases} \tag{4.2.19}$$

正解的存在性，其中 $f(t,x)$ 可能在 $t=0$ 和 $t=1$ 点附近有奇异性，即可能有 $\lim\limits_{t\to 0+0}\|f(t,\cdot)\|=+\infty$，$\lim\limits_{t\to 1-0}\|f(t,\cdot)\|=+\infty$；$p\in C[J,R^+]$ 且在 $(0,1)$ 上 $p(t)>0$，$J=[0,1]$，$R^+=[0,+\infty)$，$f\in C[(0,1)\times P,P]$，$I_k\in C[P,P]$，$k=1,2,\cdots,m$，θ 为 E 的零元.

为方便起见，列出几个条件：

(H_1) $\|f(t,x)\|\leqslant g(t)\|h(x)\|$，$t\in(0,1)$，$x\in P$，其中 g: $(0,1)\to(0,+\infty)$ 连续，h: $P\to P$ 连续有界，且

$$\int_0^1 p(s)g(s)ds<+\infty,\qquad \int_0^1\frac{ds}{p(s)}<+\infty,\qquad \int_0^1\frac{1}{p(s)}\int_s^1 p(t)g(t)dtds<+\infty.$$

(H_2) 对 (H_1) 中的 $h(x)$ 有

$$\left(\int_0^1\frac{1}{p(s)}\int_s^1 p(t)g(t)dtds\right)\cdot c+\sum_{k=1}^m c_k<\frac{1}{N},$$

其中 N 为锥 P 的正规常数，$c=\overline{\lim\limits_{\substack{\|x\|\to+\infty\\ x\in P}}}\dfrac{\|h(x)\|}{\|x\|}$，$c_k=\overline{\lim\limits_{\substack{\|x\|\to+\infty\\ x\in P}}}\dfrac{\|I_k(x)\|}{\|x\|}$，$k=1,2,\cdots,m$，这里锥 P 为正规锥.

(H_2') 将 (H_2) 中的 $\|x\|\to+\infty$ 换成 $\|x\|\to 0$，其他不变.

(H_2'') 存在 $d>0$ 使

$$\left(\int_0^1\frac{1}{p(s)}\int_s^1 p(t)g(t)dtds\right)\cdot\alpha+\sum_{k=1}^m\beta_k<\frac{d}{N},$$

其中 $\alpha=\sup\limits_{\substack{\|x\|_{PC}=d\\ x\in PC[J,P]}}\|h(x)\|$，$\beta_k=\sup\limits_{\substack{\|x\|_{PC}=d\\ x\in PC[J,P]}}\|I_k(x)\|$，$h(x)$ 如 (H_1) 中所述，锥 P 为正规锥， N 为其正规常数.

(H_3) 对 $\forall R>0$ 及 $[a,b]\subset(0,1)$，f 在 $[a,b]\times T_R$ 上一致连续.

(H_4) 存在常数 $L\geqslant 0$，$L_k\geqslant 0$ 使对 $\forall t\in(0,1)$ 和有界集 $D\subset P$ 有

$$\alpha(f(t,D))\leqslant L\alpha(D),\quad \alpha(I_k(D))\leqslant L_k\alpha(D),\qquad k=1,2,\cdots,m,$$

并且

$$2L\left(\int_0^1\frac{ds}{p(s)}\right)\cdot\max_{s\in J}p(s)+\sum_{k=1}^m L_k<1.$$

(H_5) 存在 $\bar g\in P^*$（P^* 为锥 P 的对偶锥）满足：当 $x>\theta$ 时， $\bar g(x)>0$，并且存在 a^*，b^*，满足 $t_m<a^*<b^*<1$，使得 $\underline{\lim\limits_{\substack{\|x\|\to 0,\\ x\in P}}}\dfrac{\bar g(f(t,x))}{\bar g(x)}=l(t)$（$l(t)$ 可为 $+\infty$）对 $t\in J^*=[a^*,b^*]$ 一致成立且 $\displaystyle\int_0^{a^*}\frac{1}{p(s)}ds\int_{a^*}^{b^*}p(t)l(t)dt>1$.

(H_5') 将 (H_5) 中的 $\|x\| \to 0$ 换成 $\|x\| \to +\infty$, 其他不变.

有了以上准备，下面给出本段的主要结果.

定理 4.2.2 若 $(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_5)$ 成立，则系统 (4.2.19) 至少存在一个正解.

定理 4.2.3 若 (H_1), (H_2'), (H_3), (H_4) 和 (H_5') 成立，则系统 (4.2.19) 至少存在一个正解.

定理 4.2.4 若 (H_1), (H_2''), (H_3), (H_4), (H_5) 和 (H_5') 成立，则系统 (4.2.19) 至少有两个正解 x_1 和 x_2 满足 $0 < \|x_1\|_{PC} < d < \|x_2\|_{PC}$.

注 4.2.3 在纯量空间中， (H_2) 中的 $N = 1$, (H_5) 中的 $g(x) = x$, 条件 (H_4) 自然满足，因此上述结论仍成立.

容易看出， $x \in PC[J, P]$ 为系统 (4.2.19) 的非负解，当且仅当 x 为下面带脉冲的积分算子

$$(Ax)(t) =: \int_0^t \frac{1}{p(s)} \int_s^1 p(\tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(x(t_k)), \qquad \forall t \in J \tag{4.2.20}$$

在 $PC[J, P]$ 中的不动点.

引理 4.2.5 设 (H_1), (H_3) 和 (H_4) 成立，则对 $\forall R > 0$, A 为映 $PC[J, P] \cap B_R$ 到 $PC[J, P]$ 的严格集压缩算子.

证明 首先, 类似于定理 4.2.1 的证明, 当 (H_1) 和 (H_4) 成立时, 对 $\forall R > 0$, 由 (4.2.20) 式定义的算子 A: $PC[J, P] \cap B_R \to PC[J, P]$ 连续有界. 设 $S \subset PC[J, P] \cap B_R$, 由 (H_1) 知 AS 为有界集且在每个 J_i 上等度连续，利用引理 4.2.3 知

$$\alpha_{PC}(AS) = \sup_{t \in J} \alpha((AS)(t)), \tag{4.2.21}$$

其中 $(AS)(t) = \{(Ax)(t) : x \in S\}$, $t \in J$.

利用格林函数将 (4.2.20) 式重新写成如下形式:

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t, s) p(s) f(s, x(s)) ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(x(t_k)), \qquad \forall t \in J, \tag{4.2.22}$$

其中 $G(t, s) = \min\left\{\int_0^t \frac{d\tau}{p(\tau)}, \int_0^s \frac{d\tau}{p(\tau)}\right\}$. 令 $D =: \left\{\int_0^1 G(t, s) p(s) f(s, x(s)) ds : x \in S\right\}$, $D_\delta =: \left\{\int_\delta^{1-\delta} G(t, s) p(s) f(s, x(s)) ds : x \in S\right\}$, $0 < \delta < \min\left\{\frac{1}{2}, t_1, 1 - t_m\right\}$.

由 (H_1), 对 $\forall x \in S$, 有

$$\begin{aligned} &\left\| \int_\delta^{1-\delta} G(t, s) p(s) f(s, x(s)) ds - \int_0^1 G(t, s) p(s) f(s, x(s)) ds \right\| \\ &\leqslant c_1 \int_0^\delta G(t, s) p(s) g(s) ds + c_1 \int_{1-\delta}^1 G(t, s) p(s) g(s) ds, \end{aligned} \tag{4.2.23}$$

其中 $c_1 = \max\limits_{x\in T_R}\|h(x)\|$, 从而由 (4.2.23) 和 (H_1) 知 D 与 D_δ 的 Hausdorff 距离 $d_H(D_\delta, D)\to 0\ (\delta\to 0^+)$. 故有

$$\lim_{\delta\to 0^+}\alpha(D_\delta)=\alpha(D). \tag{4.2.24}$$

下面再估计 $\alpha(D_\delta)$. 因为

$$\int_\delta^{1-\delta}G(t,s)p(s)f(s,x(s))ds\in(1-2\delta)\overline{co}(\{G(t,s)p(s)f(s,x(s)):s\in[\delta,1-\delta]\}),$$

所以

$$\begin{aligned}\alpha(D_\delta)&=\alpha\left(\left\{\int_\delta^{1-\delta}G(t,s)p(s)f(s,x(s))ds:x\in S\right\}\right)\\&\leqslant(1-2\delta)\alpha(\overline{co}(\{G(t,s)p(s)f(s,x(s)):s\in[\delta,1-\delta],x\in S\}))\\&\leqslant\alpha(\{G(t,s)p(s)f(s,x(s)):s\in[\delta,1-\delta],x\in S\})\\&\leqslant\left(\int_0^1\frac{ds}{p(s)}\right)\cdot\left(\max_{s\in J}p(s)\cdot\alpha(f(I_\delta\times S(I_\delta))\right),\end{aligned} \tag{4.2.25}$$

其中 $I_\delta=[\delta,1-\delta]$, $S(I_\delta)=\{x(t):t\in I_\delta,x\in S\}$.

由 (H_3), (H_4) 及文 [7] 中 (9.4.11) 式容易证明

$$\alpha(f(I_\delta\times S(I_\delta)))=\max_{t\in I_\delta}\alpha(f(t,S(I_\delta)))\leqslant L\cdot\alpha(S(I_\delta))\leqslant L\cdot\alpha(S(I))\leqslant 2L\cdot\alpha_{PC}(S), \tag{4.2.26}$$

其中 $S(I)=\{x(t):t\in J,x\in S\}$, 结合 (4.2.25) 和 (4.2.26) 得 $\alpha(D_\delta)\leqslant 2L\cdot\alpha_{PC}(S)$, 令 $\delta\to 0^+$ 并注意到 (4.2.24) 式得

$$\alpha(D)\leqslant 2L\cdot\alpha_{PC}(S)\cdot\left(\int_0^1\frac{ds}{p(s)}\right)\cdot\max_{s\in J}p(s).$$

很显然有 $\alpha\left(\left\{\sum\limits_{0<t_k<t}I_k(x(t_k)):x\in S\right\}\right)\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^m L_i\right)\alpha_{PC}(S)$. 利用 (4.2.21) 和 (4.2.26) 得

$$\alpha_{PC}(AS)\leqslant\left(2L\int_0^1\frac{ds}{p(s)}\cdot\max_{s\in J}p(s)+\sum_{i=1}^m L_i\right)\cdot\alpha_{PC}(S).$$

由 (H_4) 即得 A 为从 $PC[J,P]\cap B_R$ 到 $PC[J,P]$ 的严格集压缩算子. □

定理 4.2.2 的证明 考虑由 (4.2.20) 式定义的算子 A, 先从形式 (4.2.22) 看, 取 $c^*=\dfrac{\int_0^{a^*}\frac{ds}{p(s)}}{\int_0^1\frac{ds}{p(s)}}$, 由 (H_1) 及 (H_5) 知, $0<c^*<1$, 并由 $G(t,s)$ 的构造容易得出

$$G(t,s)\geqslant c^*G(\tau,s),\qquad \forall t\in J^*=[a^*,b^*],\forall\tau,s\in J. \tag{4.2.27}$$

令 $K =: \{x \in PC[J, P] : x(t) \geqslant c^* x(s), \forall t \in J^*, u \in J\}$. 显然 K 为 $PC[J, E]$ 的一个锥，且 $K \subset PC[J, P]$. 对 $\forall x \in K$, $t \in J^*$ 和 $\forall \tau \in J$, 利用 (4.2.22) 和 (4.2.27) 有

$$\begin{aligned}(Ax)(t) &= \int_0^1 G(t,s)p(s)f(s,x(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(x(t_k)) \\ &\geqslant c^* \left(\int_0^1 G(\tau,s)p(s)f(s,x(s))ds + \sum_{0<t_k<\tau} I_k(x(t_k)) \right) = c^*(Ax)(\tau),\end{aligned}$$

所以

$$A(K) \subset K. \tag{4.2.28}$$

下面证明 A 在锥 K 中连续有界. 从形式 (4.2.20) 看，依据 (H_2) 存在 $c' > c$, $c_k' > c_k$ 满足

$$b =: \left(\int_0^1 \frac{1}{p(s)} \int_s^1 p(t)g(t)dtds \right) \cdot c' + \sum_{k=1}^m c_k' < \frac{1}{N}, \tag{4.2.29}$$

且存在 $r > 0$, 当 $x \in P$ 且 $\|x\| > r$ 时，有

$$\|h(x)\| \leqslant c'\|x\|, \quad \|I_k(x)\| \leqslant c_k'\|x\|, \qquad k = 1, 2, \cdots, m, \tag{4.2.30}$$

从而对 $\forall x \in P$, 有

$$\|h(x)\| \leqslant c'\|x\| + M, \ \|I_k(x)\| \leqslant c_k'\|x\| + M, \qquad k = 1, 2, \cdots, m, \tag{4.2.31}$$

这里 $M = \max\{M_0, M_1, \cdots, M_m\}$, $M_0 = \sup\{\|h(x)\| : x \in T_r \cap P\}$, $M_k = \sup\{\|I_k(x)\| : x \in T_r \cap P\}$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$.

令 $\bar{d} =: 1 + (1 - Nb)^{-1} NG$, 这里 $G = M \left(\int_0^1 \frac{1}{p(s)} \int_s^1 p(t)g(t)dtds + m \right)$, 则

$$Ax \not\geqslant x, \qquad \forall x \in K, \|x\|_{PC} = \bar{d}. \tag{4.2.32}$$

事实上，若存在 $x^* \in K$, $\|x^*\|_{PC} = \bar{d}$, 满足 $Ax^* \geqslant x^*$, 则

$$\theta \leqslant x^*(t) \leqslant (Ax^*)(t) = \int_0^t \frac{1}{p(s)} \int_s^1 p(\tau)f(\tau, x^*(\tau))d\tau ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(x^*(t_k)), \qquad t \in J.$$

利用 (H_1) 及 $\bar{d}$ 的取法得

$$\begin{aligned}\bar{d} = \|x^*\|_{PC} &\leqslant N \left(\int_0^1 \frac{1}{p(s)} \int_s^1 p(t)g(t)dtds \right) (c'\|x^*\|_{PC} + M) + \sum_{k=1}^m (c_k'\|x^*\|_{PC} + M) \\ &= N(b\|x^*\|_{PC} + G) = N(b\bar{d} + G) < \bar{d},\end{aligned}$$

矛盾，故 (4.2.32) 式成立.

另由 (H_5) 知存在 $\varepsilon>0$, 使

$$\int_0^{a^*}\frac{1}{p(s)}ds\int_{a^*}^{b^*}p(t)(l(t)-\varepsilon)dt>1. \tag{4.2.33}$$

这样就存在 $0<r_1<\bar{d}$, 使当 $x\in T_{r_1}\cap P$ 且 $x\neq\theta$ 时，有

$$\bar{g}(f(t,x))\geqslant(l(t)-\varepsilon)\bar{g}(x),\qquad t\in J^*. \tag{4.2.34}$$

下面由此说明

$$Ax\nleqslant x,\qquad \forall x\in K,\quad \|x\|_{PC}=r_1. \tag{4.2.35}$$

事实上，若存在 $x_0\in K$, $\|x_0\|_{PC}=r_1$, 满足 $Ax_0\leqslant x_0$, 则对 $\forall t\in J^*$ 和 $\forall s\in J$ 有 $x_0(t)\geqslant c^*x_0(s)$, 因此

$$\inf_{t\in J^*}\|x_0(t)\|\geqslant c^*N^{-1}\|x_0\|_{PC}=c^*N^{-1}r_1>0, \tag{4.2.36}$$

$$x_0(t)\geqslant(Ax_0)(t)\geqslant\int_0^{a^*}\frac{1}{p(s)}ds\int_{a^*}^{b^*}p(\tau)f(\tau,x_0(\tau))d\tau,\qquad t\in J^*. \tag{4.2.37}$$

由 (4.2.37) 和 (4.2.34) 知当 $t\in J^*$ 时，有

$$\begin{aligned}\bar{g}(x_0(t))&\geqslant\int_0^{a^*}\frac{1}{p(s)}ds\int_{a^*}^{b^*}p(\tau)\bar{g}(f(\tau,x_0(\tau)))d\tau\\&\geqslant\int_0^{a^*}\frac{1}{p(s)}ds\int_{a^*}^{b^*}p(\tau)(l(\tau)-\varepsilon)\bar{g}(x_0(\tau))d\tau.\end{aligned}$$

因为 $x_0(t)$ 在 J^* 上连续，当然 $\bar{g}(x(t))$ 在 J^* 上也连续，故能取到最小值，利用 (4.2.36) 及 (H_5) 中对 $\bar{g}$ 的要求知 $\min\limits_{t\in J^*}\bar{g}(x_0(t))>0$, 再由 (4.2.33) 即得矛盾，故 (4.2.35) 成立.

这样由 (4.2.32), (4.2.35), 结合引理 4.2.4 即得定理 4.2.2 的结论成立. □

定理 4.2.3 的证明和定理 4.2.2 的证明类似，从略.

定理 4.2.4 的证明 构造和定理 4.2.2 的证明中同样的锥 K, 同样有 (4.2.28) 成立. 下面证明对 (H_2'') 中的 d 有

$$Ax\ngeqslant x,\qquad \forall x\in K,\ \|x\|_{PC}=d. \tag{4.2.38}$$

事实上，若存在 $x^*\in K$, $\|x^*\|_{PC}=d$, 满足 $Ax^*\geqslant x^*$, 则

$$\theta\leqslant x^*(t)\leqslant\int_0^t\frac{1}{p(s)}\int_s^1p(\tau)f(\tau,x^*(\tau))d\tau ds+\sum_{0<t_k<t}I_k(x^*(t_k)).$$

由 (H_2'') 知

$$d = \|x^*\|_{PC} \leqslant N\left(\int_0^1 \frac{1}{p(s)}\int_s^1 p(\tau)\|f(\tau, x^*(\tau))\|d\tau ds + \sum_{k=1}^m \|I_k(x^*(t_k))\|\right)$$

$$\leqslant N\left(\int_0^1 \frac{1}{p(s)}\int_s^1 p(\tau)g(\tau)\|h(x^*(\tau))\|d\tau ds + \sum_{k=1}^m \|I_k(x^*(t_k))\|\right)$$

$$\leqslant N\left(\int_0^1 \frac{1}{p(s)}\int_s^1 p(\tau)g(\tau)d\tau ds \cdot \alpha + \sum_{k=1}^m \beta_k\right) < d,$$

矛盾，故 (4.2.38) 式成立.

因 (H_5) 和 (H_5') 成立，同定理 4.2.2 的后半部分证明一样，可得存在 $0 < r_1 < d < r_2$ 使对 $\forall x \in K$, $\|x\|_{PC} = r_1$ 或 $\|x\|_{PC} = r_2$ 时都有 $Ax \not\leqslant x$ 成立.

这样连续两次应用引理 4.2.4, 即得定理 4.2.4 的结论成立. □

下面我们说明定理 4.2.2 的条件是合理的，即满足假设条件的抽象函数是存在的.

如在有界数列组成的抽象空间 l^∞ 中，对 $x = (x_n) \in l^\infty$, 令 $\|x\| = \sup\limits_{n\geqslant 1}|x_n|$, 则 l^∞ 为 Banach 空间. 取 $P = \{(x_n)\colon x_n \geqslant 0,\ n = 1, 2, \cdots\}$, 则 P 为 l^∞ 的正规锥，且正规常数为 1. 在 l^∞ 中考虑形如 (4.2.19) 的问题. 取 $p(t) = \sqrt{t}$, $f = (f_n)$, $f_n = \dfrac{\pi \sin t}{\sqrt{t(1-t)}}\left(\ln\left(3 + \dfrac{x_n}{n}\right) + \dfrac{t}{n}\sqrt{x_n}|\sin x_{2n}|\right)$, $m = 1$, 即只有一个脉冲点 $t_1 = \dfrac{1}{3}$, $I_1(x) = (I_{1n}(x))$, $I_{1n}(x) = \dfrac{4}{5}x_n + \dfrac{1}{n}e^{\frac{1}{3}}\ln(1 + x_{n+2}^2)$. 下面我们说明这样的函数满足 (H_1)~(H_5).

首先可取 $g(t) = \dfrac{\pi}{\sqrt{t(1-t)}}$, $h_n(x) = \ln(3 + \dfrac{x_n}{n}) + \dfrac{\sqrt{x_n}}{n}|\sin x_{2n}|$, $h(x) = (h_n(x))$, 由此可看出 (H_1) 满足.

由于 $\overline{\lim\limits_{\substack{\|x\|\to+\infty\\ x\in P}}}\dfrac{\|h(x)\|}{\|x\|} = 0$, $c = \overline{\lim\limits_{\substack{\|x\|\to+\infty\\ x\in P}}}\dfrac{\|I_1(x)\|}{\|x\|} = \dfrac{4}{5}$, 因此 (H_2) 是满足的，另外 (H_3) 成立是显然的.

同时利用对角线法则抽取子列的方法可得 (H_4) 中的 $L = 0$, $L_1 = \dfrac{4}{5}$, 亦即 (H_4) 是成立的.

最后，对 $x \in P$, 取 $\bar{g} \in P^*$, 满足 $\bar{g}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x_n}{n^2}$, 显然有当 $x > \theta$ 时，$\bar{g}(x) > 0$. 取 $[a^*, b^*] = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right]$, 容易看出

$$\lim_{\substack{\|x\|\to 0\\ x\in P}} \frac{\bar{g}(f(t,x))}{\bar{g}(x)} = \lim_{\substack{\|x\|\to 0\\ x\in P}} \frac{\pi \sin t}{\sqrt{t(1-t)}} \cdot \frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\ln\left(3+\frac{x_n}{n}\right)+\frac{t\sqrt{x_n}}{n^3}|\sin x_{2n}|\right)}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{n^2}} = +\infty$$

关于 $t\in[a^*,b^*]$ 一致成立，即 (H_5) 满足.

综上可得满足 $(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_5)$ 的抽象函数是存在的，即满足定理 4.2.2 的条件的抽象函数存在.

2. 无穷区间上二阶脉冲微分系统的边值问题

对于半直线上二阶脉冲微分系统的边值问题，郭大钧教授利用单调迭代方法得到了正的最小解的存在性 (见 [8]). 在这里，我们利用不动点定理考虑 Banach 空间 E 中无穷区间上具有无穷多个脉冲点的二阶微分方程的边值问题:

$$\begin{cases} x''(t)+f(t,x(t),x'(t))=\theta, & t\in J, t\neq t_k,\\ \Delta x = x(t_k+0)-x(t_k-0)=I_k(x(t_k),x'(t_k)), & t=t_k,\\ \Delta x' = x'(t_k+0)-x'(t_k-0)=H_k(x(t_k),x'(t_k)), & t=t_k, \quad k=1,2,\cdots,\\ x(0)=x_0, \quad x'(+\infty)=x_\infty, \end{cases} \tag{4.2.39}$$

其中 $J=[0,+\infty)$, $f\in C[J\times E\times E,\ E]$, I_k, $H_k\in C[E\times E,E]$, x_0, $x_\infty\in E$, $0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots$, $t_k\to+\infty$, $x'(+\infty)=\lim\limits_{t\to+\infty}x'(t)$.

在上面所定义的 $PC[J,E]$ 和 $PC^1[J,E]$ 的基础上，引入两个新的空间，令

$$FPC[J,E]=\{x\in PC[J,E]:\sup_{t\in J}\frac{\|x(t)\|}{1+t}<+\infty\},$$

$$DPC[J,E]=\{x\in PC^1[J,E]:\sup_{t\in J}\frac{\|x(t)\|}{1+t}<+\infty,\ \sup_{t\in J}\|x'(t)\|<+\infty\}.$$

同前面一样， $x'(t_k)$ 理解为左导数 $x'_-(t_k)$. 显然 $DPC[J,E]\subset FPC[J,E]$. 易知，在范数

$$\|x\|_F =: \sup_{t\in J}\frac{\|x(t)\|}{1+t} \tag{4.2.40}$$

下， $FPC[J,E]$ 成为一个 Banach 空间. 在范数

$$\|x\|_D =: \max\{\|x\|_F,\ \|x'\|_B\} \tag{4.2.41}$$

下， $DPC[J,E]$ 也成为一个 Banach 空间，其中 $\|x\|_F$ 由 (4.2.40) 式给出， $\|x'\|_B=\sup\limits_{t\in J}\|x'(t)\|$. 用 $\alpha_E(\cdot),\alpha_F(\cdot),\alpha_D(\cdot)$ 分别表示 Banach 空间 E, $FPC[J,E]$ 和 $DPC[J,E]$

中的 Kuratowski 非紧性测度. 令 $J_0=[0,t_1]$, $J_k=(t_k,\ t_{k+1}]$ $(k=1,2,\cdots)$. 又令 $J'=J\setminus\{t_1,t_2,\cdots\}$. 称 $x\in DPC[J,E]\cap C^2[J',E]$ 为边值问题 (4.2.39) 的一个解, 如果 $x(t)$ 满足 (4.2.39) 式.

引理 4.2.6[9](Daher 不动点定理) 设 D 是 Banach 空间 E 中一个非空有界凸闭集, 若连续映象 A: $D\to D$ 具有性质:

$$C\subset D\text{可数, 非相对紧}\Longrightarrow \alpha(A(C))<\alpha(C),$$

则 A 在 D 中必有不动点.

现列出下列条件:

(H_1) 存在非负连续函数 $a,b,c\in C[J,J]$ 和非负常数 $a_k,b_k,c_k,d_k,\tau_k,\sigma_k(k=1,2,3,\cdots)$, 满足

$$\|f(t,x,y)\|\leqslant a(t)\|x\|+b(t)\|y\|+c(t),\qquad \forall t\in J,\ x,y\in E,$$

$$\|I_k(x,y)\|\leqslant a_k\|x\|+b_k\|y\|+\tau_k,\ \|H_k(x,y)\|\leqslant c_k\|x\|+d_k\|y\|+\sigma_k,$$
$$\forall x,y\in E,\ i=1,2,\cdots,$$

且

$$\beta=:\int_0^{+\infty}[(1+t)a(t)+b(t)]dt+a^*+b^*+c^*+d^*<1,\qquad \int_0^{+\infty}c(t)dt<+\infty,$$

其中

$$a^*=:\sum_{k=1}^{+\infty}a_k<+\infty,\qquad b^*=:\sum_{k=1}^{+\infty}b_k<+\infty,\qquad c^*=:\sum_{k=1}^{+\infty}(1+t_k)c_k<+\infty,$$

$$d^*=:\sum_{k=1}^{+\infty}d_k<+\infty,\qquad \tau^*=:\sum_{k=1}^{+\infty}\tau_k<+\infty,\qquad \sigma^*=:\sum_{k=1}^{+\infty}\sigma_k<+\infty.$$

(H_2) 存在非负可测函数 l_1, $l_2\in L[0,+\infty)$ 和非负常数 $\bar a_k,\bar b_k,\bar c_k,\bar d_k$, 对任意有界可数集 D_1, $D_2\subset E$ 有

$$\alpha_E(f(t,D_1,D_2))\leqslant l_1(t)\alpha_E(D_1)+l_2(t)\alpha_E(D_2),\qquad \forall t\in J,$$

$$\alpha_E(I_k(D_1,D_2))\leqslant \bar a_k\alpha_E(D_1)+\bar b_k\alpha_E(D_2),$$

$$\alpha_E(H_k(D_1,D_2))\leqslant \bar c_k\alpha_E(D_1)+\bar d_k\alpha_E(D_2)$$

且

$$l=:\ 2\int_0^{+\infty}[(1+t)l_1(t)+l_2(t)]dt+\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\bar a_k+\frac{\bar b_k}{1+t_k}+(1+t_k)\bar c_k+\bar d_k\right]<1.$$

引理 4.2.7 设 (H_1) 成立，则 $x\in DPC[J,E]\cap C^2[J',E]$ 为边值问题 (4.2.39) 的解当且仅当 x 为下面脉冲积分微分方程

$$
\begin{aligned}
x(t)=x_0+tx_\infty+\int_0^{+\infty}G(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds+t\sum_{t_k\geqslant t}H_k(x(t_k),x'(t_k))\\
+\sum_{0<t_k<t}[I_k(x(t_k),x'(t_k))+t_kH_k(x(t_k),x'(t_k))],\qquad\forall t\in J
\end{aligned}
\tag{4.2.42}
$$

的解，其中 $G(t,s)=:\min\{t,s\}$.

证明 首先说明 (4.2.42) 式的右端各项有意义. 事实上，由条件 (H_1) 我们知道对任意 $x\in DPC[J,E]$ 有

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\|f(s,x(s),x'(s))\|ds&\leqslant\int_0^{+\infty}[a(s)\|x(s)\|+b(s)\|x'(s)\|+c(s)]ds\\
&\leqslant\int_0^{+\infty}[(1+s)a(s)\frac{\|x(s)\|}{1+s}+b(s)\|x'(s)\|+c(s)]ds\\
&\leqslant\int_0^{+\infty}[(1+s)a(s)+b(s)]ds\\
&\quad+\int_0^{+\infty}c(s)ds<+\infty,
\end{aligned}
\tag{4.2.43}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty}\|H_k(x(t_k),x'(t_k))\|&\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}[c_k\|x(t_k)\|+d_k\|x'(t_k)\|+\sigma_k]\\
&=\sum_{k=1}^{+\infty}[c_k(1+t_k)\cdot\frac{\|x(t_k)\|}{1+t_k}+d_k\|x'(t_k)\|]+\sum_{k=1}^{+\infty}\sigma_k\\
&\leqslant(c^*+d^*)\|x\|_D+\sigma^*,
\end{aligned}
\tag{4.2.44}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+t}\sum_{0<t_k<t}\|I_k(x(t_k),x'(t_k))\|&\leqslant\sum_{0<t_k<t}[\frac{a_k\|x(t_k)\|}{1+t}+b_k\|x'(t_k))\|+\tau_k]\\
&\leqslant\sum_{0<t_k<t}[\frac{a_k\|x(t_k)\|}{1+t_k}+b_k\|x'(t_k))\|+\tau_k]\\
&\leqslant(a^*+b^*)\|x\|_D+\tau^*.
\end{aligned}
\tag{4.2.45}
$$

其余和文 [8] 的证明类似，在此从略. □

下面在 $DPC[J,E]$ 上考察算子

$$
\begin{aligned}
Ax(t)=:x_0+tx_\infty+\int_0^{+\infty}G(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds+t\sum_{t_k\geqslant t}H_k(x(t_k),x'(t_k))\\
+\sum_{0<t_k<t}[I_k(x(t_k),x'(t_k))+t_kH_k(x(t_k),x'(t_k))],\qquad\forall t\in J.
\end{aligned}
\tag{4.2.46}
$$

引理 4.2.8 设 (H_1) 成立，则由 (4.2.46) 式定义的算子将 $B_D(\theta,R)$ 映入 $B_D(\theta,R)$, 其中 $B_D(\theta,R) =: \{x \in DPC[J,E] : \|x\|_D \leqslant R\}$, $R = \dfrac{r}{1-\beta}$, β 如 (H_1) 中所定义, $r =: \|x_0\| + \|x_\infty\| + \int_0^{+\infty} c(s)ds + \tau^* + \sigma^*$.

证明 设 $x \in B_D(\theta,R)$, 则利用 (4.2.43)~(4.2.45) 式, 对 $\forall x \in B_D(\theta,R)$ 有

$$\begin{aligned}
\frac{\|(Ax)(t)\|}{1+t} = & \Big\|\frac{x_0+tx_\infty}{1+t} + \int_0^{+\infty}\frac{G(t,s)}{1+t}f(s,x(s),x'(s))ds \\
& + \frac{t}{1+t}\sum_{t_k\geqslant t}H_k(x(t_k),x'(t_k)) \\
& + \frac{1}{1+t}\sum_{0<t_k<t}[I_k(x(t_k),x'(t_k)) + t_kH_k(x(t_k),x'(t_k))]\Big\| \\
\leqslant & \|x_0\| + \|x_\infty\| + \int_0^{+\infty}\|f(s,x(s),x'(s))\|ds \\
& + \sum_{k=1}^{+\infty}\|H_k(x(t_k),x'(t_k))\| + \frac{1}{1+t}\sum_{0<t_k<t}\|I_k(x(t_k),x'(t_k))\| \\
\leqslant & \|x_0\| + \|x_\infty\| + \int_0^{+\infty}[(1+t)a(t)+b(t)]dt\cdot\|x\|_D + \int_0^{+\infty}c(t)dt \\
& + (a^*+b^*+c^*+d^*)\|x\|_D + \tau^* + \sigma^* \leqslant r + \beta\|x\|_D \leqslant R.
\end{aligned} \tag{4.2.47}$$

类似地有

$$\begin{aligned}
\|(Ax)'(t)\| \leqslant & \|x_\infty\| + \int_t^{+\infty}\|f(s,x(s),x'(s))\|ds + \sum_{0<t_k<t}\|H_k(x(t_k),x'(t_k))\| \\
\leqslant & \|x_\infty\| + \int_0^{+\infty}[(1+t)a(t)+b(t)]dt\cdot\|x\|_D + \int_0^{+\infty}c(t)dt \\
& + (c^*+d^*)\|x\|_D + \sigma^* \leqslant r + \beta\|x\|_D \leqslant R, \qquad \forall t \in J.
\end{aligned}$$

结合 (4.2.46) 式可得

$$\|Ax\|_D \leqslant r + \beta\|x\|_D \leqslant r + \beta R \leqslant R.$$

所以 A: $B_D(\theta,R) \to B_D(\theta,R)$. □

引理 4.2.9 设 (H_1) 成立，则对任意 $V \subset B_D(\theta,R)$, $\dfrac{(AV)(s)}{1+s}$, $(AV)'(s)$ 在每个 J_k 上都等度连续，并且对 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 对 $\forall x \in V$, 当 s_1, $s_2 \geqslant N$ 时有

$$\left\|\frac{(Ax)(s_1)}{1+s_1} - \frac{(Ax)(s_2)}{1+s_2}\right\| < \varepsilon, \qquad \|(Ax)'(s_1) - (Ax)'(s_2)\| < \varepsilon.$$

证明 对 $\forall x \in V$, 当 $s_2 > s_1$, $s_2, s_1 \in J_k$ 时有

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{(Ax)(s_1)}{1+s_1} - \frac{(Ax)(s_2)}{1+s_2}\right\| \\
\leqslant &\left\|\frac{x_0 + s_1 x_\infty}{1+s_1} - \frac{x_0 + s_2 x_\infty}{1+s_2}\right\| \\
&+ \left\|\frac{s_1}{1+s_1}\int_{s_1}^{+\infty} f(s,x(s),x'(s))ds - \frac{s_2}{1+s_2}\int_{s_2}^{+\infty} f(s,x(s),x'(s))ds\right\| \\
&+ \left\|\int_0^{s_1} \frac{s}{1+s_1} f(s,x(s),x'(s))ds - \int_0^{s_2} \frac{s}{1+s_2} f(s,x(s),x'(s))ds\right\| \\
&+ \left|\frac{s_1}{1+s_1} - \frac{s_2}{1+s_2}\right| \sum_{t_k \geqslant s_1} \|H_k(x(t_k),x'(t_k))\| \\
&+ \left|\frac{1}{1+s_1} - \frac{1}{1+s_2}\right| \sum_{0<t_k<s_1} \|I_k(x(t_k),x'(t_k)) + t_k H_k(x(t_k),x'(t_k))\| \\
\leqslant &(\|x_0\| + \|x_\infty\|)|s_2 - s_1| + \left|\frac{s_1}{1+s_1} - \frac{s_2}{1+s_2}\right| \left\|\int_0^{+\infty} f(s,x(s),x'(s))ds\right\| \\
&+ \left\|\int_{s_1}^{s_2} f(s,x(s),x'(s))ds\right\| + \left|\frac{1}{1+s_1} - \frac{1}{1+s_2}\right| \cdot \left\|\int_0^{s_1} sf(s,x(s),x'(s))ds\right\| \\
&+ \left\|\int_{s_1}^{s_2} sf(s,x(s),x'(s))ds\right\| + \left|\frac{s_1}{1+s_1} - \frac{s_2}{1+s_2}\right| \sum_{t_k \geqslant s_1} \|H_k(x(t_k),x'(t_k))\| \\
&+ \left|\frac{1}{1+s_1} - \frac{1}{1+s_2}\right| \sum_{0<t_k<s_1} \|I_k(x(t_k),x'(t_k)) + t_k H_k(x(t_k),x'(t_k))\|. \qquad (4.2.48)
\end{aligned}
$$

这样，利用 (H_1) 并结合 (4.2.43)~(4.2.45) 式容易看出 $\dfrac{(AV)(s)}{1+s}$ 在每个 J_k 上都等度连续. 完全类似地，可以说明 $(AV)'(s)$ 在每个 J_k 上的等度连续性.

下面证明：对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 对 $\forall x \in V$, 当 s_1, $s_2 \geqslant N$ 时有

$$
\left\|\frac{(Ax)(s_1)}{1+s_1} - \frac{(Ax)(s_2)}{1+s_2}\right\| < \varepsilon, \qquad \|(Ax)'(s_1) - (Ax)'(s_2)\| < \varepsilon.
$$

结合 (4.2.48) 的第一个不等式和 (4.2.42) 式，只需证明对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 对 $\forall x \in V$, 当 $s_2 > s_1 \geqslant N$ 时有

$$
\left\|\int_0^{s_1} \frac{s}{1+s_1} f(s,x(s),x'(s))ds - \int_0^{s_2} \frac{s}{1+s_2} f(s,x(s),x'(s))ds\right\| < \varepsilon \qquad (4.2.49)
$$

和

$$\left\|\frac{s_2}{1+s_2}\sum_{t_k\geqslant s_2}H_k(x(t_k),x'(t_k))-\frac{s_1}{1+s_1}\sum_{t_k\geqslant s_1}H_k(x(t_k),x'(t_k))\right\|$$

$$+\left\|\frac{1}{1+s_2}\sum_{0<t_k<s_2}[I_k(x(t_k),x'(t_k))+t_kH_k(x(t_k),x'(t_k))]\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1+s_1}\sum_{0<t_k<s_1}[I_k(x(t_k),x'(t_k))+t_kH_k(x(t_k),x'(t_k))]\right\|<\varepsilon \qquad (4.2.50)$$

成立即可.

由于 V 是有界的，利用 (4.2.43) 式知存在 $M>0$, 满足对 $\forall x\in V$ 有

$$\int_0^{+\infty}\|f(s,x(s),x'(s))\|ds\leqslant M,$$

同时存在 $L>0$, 满足

$$\int_L^{+\infty}\|f(s,x(s),x'(s))\|ds<\frac{\varepsilon}{3}$$

关于 $x\in V$ 一致成立. 令 $N>\dfrac{6ML}{\varepsilon}$, 则对 $\forall x\in V$ 和 $s_1,s_2\geqslant N$ 有

$$\left\|\int_0^{s_1}\frac{s}{1+s_1}f(s,x(s),x'(s))ds-\int_0^{s_2}\frac{s}{1+s_2}f(s,x(s),x'(s))ds\right\|$$

$$\leqslant\int_0^L\left|\frac{s}{1+s_1}-\frac{s}{1+s_2}\right|\cdot\|f(s,x(s),x'(s))\|ds$$

$$+\int_L^{s_1}\frac{s}{1+s_1}\|f(s,x(s),x'(s))\|ds+\int_L^{s_2}\frac{s}{1+s_2}\|f(s,x(s),x'(s))\|ds$$

$$\leqslant\frac{2L}{1+N}\int_0^L\|f(s,x(s),x'(s))\|ds+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon,$$

即 (4.2.49) 式成立. 下面说明 (4.2.50) 式成立. 注意到

$$\left\|\frac{s_2}{1+s_2}\sum_{t_k\geqslant s_2}H_k(x(t_k),x'(t_k))-\frac{s_1}{1+s_1}\sum_{t_k\geqslant s_1}H_k(x(t_k),x'(t_k))\right\|$$

$$+\left\|\frac{1}{1+s_2}\sum_{0<t_k<s_2}[I_k(x(t_k),x'(t_k))+t_kH_k(x(t_k),x'(t_k))]\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1+s_1}\sum_{0<t_k<s_1}[I_k(x(t_k),x'(t_k))+t_kH_k(x(t_k),x'(t_k))]\right\|$$

$$\leqslant \left|\frac{s_2}{1+s_2}-\frac{s_1}{1+s_1}\right|\sum_{t_k\geqslant s_2}\|H_k(x(t_k),x'(t_k))\|+\frac{s_1}{1+s_1}\sum_{s_2>t_k\geqslant s_1}\|H_k(x(t_k),x'(t_k))\|$$
$$+\left|\frac{1}{1+s_2}-\frac{1}{1+s_1}\right|\sum_{s_1>t_k>0}\|I_k(x(t_k),x'(t_k))+t_kH_k(x(t_k),x'(t_k))\|$$
$$+\frac{1}{1+s_2}\sum_{s_2>t_k\geqslant s_1}\|I_k(x(t_k),x'(t_k))+t_kH_k(x(t_k),x'(t_k))\|.$$

由 (4.2.44), (4.2.45) 式及 $t_k\to+\infty$ 可知，当 s_1,s_2 充分大时，

$$\left|\frac{s_2}{1+s_2}-\frac{s_1}{1+s_1}\right|\sum_{t_k\geqslant s_2}\|H_k(x(t_k),x'(t_k))\|,\qquad \frac{s_1}{1+s_1}\sum_{s_2>t_k\geqslant s_1}\|H_k(x(t_k),x'(t_k))\|$$

和

$$\frac{1}{1+s_2}\sum_{s_2>t_k\geqslant s_1}\|I_k(x(t_k),x'(t_k))+t_kH_k(x(t_k),x'(t_k))\|$$

都可以任意小，这样只需证明当 s_1,s_2 充分大时，

$$\left|\frac{1}{1+s_2}-\frac{1}{1+s_1}\right|\sum_{0<t_k<s_1}\|I_k(x(t_k),x'(t_k))+t_kH_k(x(t_k),x'(t_k))\|$$

能任意小即可. 由 (4.2.44) 和 (4.2.45) 可知，对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\bar{N}>0$, 当 $s>\bar{N}$ 时，

$$\frac{1}{1+s}\sum_{s>t_k\geqslant\bar{N}}\|I_k(x(t_k),x'(t_k))+t_kH_k(x(t_k),x'(t_k))\|<\frac{\varepsilon}{4}$$

对 $x\in V$ 一致成立. 取 $N>\bar{N}$ 充分大满足

$$\frac{1}{1+N}\sum_{\bar{N}>t_k>0}\|I_k(x(t_k),x'(t_k))+t_kH_k(x(t_k),x'(t_k))\|<\frac{\varepsilon}{4},$$

使对 $x\in V$ 一致成立，这样当 $s_2>s_1>N$ 时，

$$\left|\frac{1}{1+s_2}-\frac{1}{1+s_1}\right|\sum_{0<t_k<s_1}\|I_k(x(t_k),x'(t_k))+t_kH_k(x(t_k),x'(t_k))\|$$
$$=\left|\frac{1}{1+s_2}-\frac{1}{1+s_1}\right|\sum_{0<t_k<\bar{N}}\|I_k(x(t_k),x'(t_k))+t_kH_k(x(t_k),x'(t_k))\|$$
$$+\left|\frac{1}{1+s_2}-\frac{1}{1+s_1}\right|\sum_{\bar{N}\leqslant t_k<s_1}\|I_k(x(t_k),x'(t_k))+t_kH_k(x(t_k),x'(t_k))\|$$
$$<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon,$$

此即 (4.2.50) 式成立.

至于当 s_1, s_2 充分大时，$\|(Ax)'(s_1)-(Ax)'(s_2)\|<\varepsilon$ 可类似证明. □

类似于 [25] 中引理 2.4 的证明，我们有下述引理.

引理 4.2.10　设 (H_1) 成立，则对任意 $V\subset B_D(\theta,R)$, 有

$$\alpha_D(AV)=\max\left\{\sup_{t\in J}\alpha_E\Big(\frac{(AV)(t)}{1+t}\Big),\ \sup_{t\in J}\alpha_E((AV)'(t))\right\}.$$

定理 4.2.5　设 (H_1) 和 (H_2) 成立, 则系统 (4.2.39) 至少有一个解属于 $PDC[J,E]\cap C^2[J',E]$.

证明　仍考虑由 (4.2.46) 定义的算子，显然 A: $B_D(\theta,R)\to B_D(\theta,R)$ 且 $B_D(\theta,R)$ 为 Banach 空间 $PDC[J,E]$ 中的非空有界凸闭集. 下面证明 A 在 $B_D(\theta,R)$ 中为连续算子. 设 $x_n, x_0\in B_D(\theta,R)$ 且 $\|x_n-x_0\|_D\to 0\ (n\to+\infty)$. 则由 (4.2.43)~(4.2.45) 和勒贝格控制收敛定理知

$$\begin{aligned}\left\|\frac{(Ax_n)(t)}{1+t}-\frac{(Ax)(t)}{1+t}\right\| \leqslant& \int_0^{+\infty}\frac{G(t,s)}{1+t}\|f(s,x_n(s),x_n'(s))-f(s,x(s),x'(s))\|ds\\ &+\frac{t}{1+t}\sum_{t_k\geqslant t}\|H_k(x_n(t_k),x_n'(t_k))-H_k(x(t_k),x'(t_k))\|\\ &+\frac{1}{1+t}\sum_{0<t_k<t}[\|I_k(x_n(t_k),x_n'(t_k))-I_k(x(t_k),x'(t_k))\|\\ &+t_k\|H_k(x_n(t_k),x_n'(t_k))-H_k(x(t_k),x'(t_k))\|]\to 0,\\ &n\to+\infty,\forall t\in J_k\end{aligned}\tag{4.2.51}$$

且

$$\begin{aligned}\|(Ax_n)'(t)-(Ax)'(t)\|\leqslant&\int_t^{+\infty}\|f(s,x_n(s),x_n'(s))-f(s,x(s),x'(s))\|ds\\ &+\sum_{t_k\geqslant t}\|H_k(x_n(t_k),x_n'(t_k))-H_k(x(t_k),x'(t_k))\|\to 0,\\ &n\to+\infty,\forall t\in J_k.\end{aligned}\tag{4.2.52}$$

因此由引理 4.2.10 知 $\alpha_D(\{Ax_n\})=0$, 所以 $\{Ax_n\}$ 在 $PDC[J,E]$ 中是相对紧的. 下面我们证明

$$\|Ax_n-Ax\|_D\to 0.\tag{4.2.53}$$

事实上，若不成立，则存在 $\varepsilon_0>0$ 和 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$, 满足

$$\|Ax_{n_k}-Ax\|_D\geqslant\varepsilon_0,\qquad k=1,2,\cdots.\tag{4.2.54}$$

由 $\{Ax_n\}$ 的相对紧性知 $\{Ax_{n_k}\}$ 存在一个子列，不妨仍设为 $\{Ax_{n_k}\}$ 在 $PDC[J,E]$ 中收敛于 $y\in PDC[J,E]$, 即

$$\|Ax_{n_k}-y\|_D\to 0,\qquad k\to+\infty. \tag{4.2.55}$$

利用 (4.2.51), (4.2.52) 和 (4.2.55) 可知 $y=Ax$, 这与 (4.2.54) 矛盾，所以 (4.2.53) 成立. 故 A 在 $B_D(\theta,R)$ 中连续.

设 $C\subset B_D(\theta,R)$ 为任一可数集且 $\alpha_D(C)\neq 0$, 下面考虑 $\alpha_D((AC)(t))$, $\forall t\in J$. 令

$$\begin{aligned}(A_nx)(t)=:{}&x_0+tx_\infty+\int_0^n G(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds+t\sum_{t\leqslant t_k<n}H_k(x(t_k),x'(t_k))\\&+\sum_{0<t_k<t}[I_k(x(t_k),x'(t_k))+t_kH_k(x(t_k),x'(t_k))],\qquad\forall t\in J.\end{aligned}\tag{4.2.56}$$

由 (H_1) 及 (4.2.43)~(4.2.45) 知，对任意 $x\in C$,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{(A_nx)(t)}{1+t}-\frac{(Ax)(t)}{1+t}\right\|\leqslant{}&\int_n^{+\infty}\frac{G(t,s)}{1+t}\|f(s,x(s),x'(s))\|ds\\&+\frac{t}{1+t}\sum_{t_k\geqslant n}\|H_k(x(t_k),x'(t_k))\|\\\leqslant{}&\int_n^{+\infty}[(1+t)a(t)+b(t)]dt\cdot\|x\|_D+\int_n^{+\infty}c(t)dt\\&+\sum_{t_k\geqslant n}[(1+t_k)c_i+d_i]\cdot\|x\|_d+\sum_{t_k\geqslant n}\sigma_k\to 0\ (n\to+\infty),\end{aligned}$$

这意味着

$$d_{\mathrm{H}}\Big(\frac{(AC)(t)}{1+t},\ \frac{(A_nC)(t)}{1+t}\Big)\to 0,\qquad n\to+\infty,\ \forall t\in J,$$

其中 d_H 表示 Hausdorff 距离. 因此由非紧性测度的性质得到

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha_E\Big(\frac{(A_nC)(t)}{1+t}\Big)=\alpha_E\Big(\frac{(AC)(t)}{1+t}\Big),\qquad\forall t\in J. \tag{4.2.57}$$

下面我们估计 $\alpha_E\Big(\frac{(A_nC)(t)}{1+t}\Big)$.

利用 (4.2.56), 引理 4.2.1 和引理 4.2.7, 并利用

$$\alpha_E\Big(\frac{C(t)}{1+t}\Big)\leqslant\alpha_D(C),\quad \alpha_E(C'(t))\leqslant\alpha_D(C),\qquad\forall t\in J$$

知

$$
\begin{aligned}
&\alpha_E\left(\frac{(A_nC)(t)}{1+t}\right)\\
\leqslant\ &\alpha_E\left(\left\{\int_0^n \frac{G(t,s)}{1+t}f(s,x(s),x'(s))ds:\ x\in C\right\}\right)\\
&+\alpha_E\left(\left\{\frac{t}{1+t}\sum_{t\leqslant t_k<n}H_k(x(t_k),x'(t_k)):\ x\in C\right\}\right)\\
&+\alpha_E\left(\left\{\frac{1}{1+t}\sum_{0<t_k<t}[I_k(x(t_k),x'(t_k))+t_kH_k(x(t_k),x'(t_k))]:\ x\in C\right\}\right)\\
\leqslant\ &2\int_0^n[l_1(s)\alpha_E(C(s))+l_2(s)\alpha_E(C'(s))]ds+\sum_{t\leqslant t_k<n}[\bar{c}_k\alpha_E(C(t_k))+\bar{d}_k\alpha_E(C'(t_k))]\\
&+\frac{1}{1+t}\sum_{0<t_k<t}[\bar{a}_k\alpha_E(C(t_k))+\bar{b}_k\alpha_E(C'(t_k))+t_k\bar{c}_k\alpha_E(C(t_k))+t_k\bar{d}_k\alpha_E(C'(t_k))]\\
\leqslant\ &2\int_0^n\left[l_1(s)(1+s)\alpha_E\left(\frac{C(s)}{1+s}\right)+l_2(s)\alpha_E(C'(s))\right]ds\\
&+\sum_{0<t_k<n}\left[(1+t_k)\bar{c}_k\alpha_E\left(\frac{C(t_k)}{1+t_k}\right)+\bar{d}_k\alpha_E(C'(t_k))\right]\\
&+\sum_{0<t_k<t}\left[\bar{a}_k\alpha_E\left(\frac{C(t_k)}{1+t_k}\right)+\frac{\bar{b}_k}{1+t_k}\alpha_E(C'(t_k))\right]\\
\leqslant\ &2\int_0^{+\infty}[l_1(s)(1+s)+l_2(s)]ds\cdot\alpha_D(C)+\sum_{k=1}^{+\infty}((1+t_k)\bar{c}_k+\bar{d}_k)\cdot\alpha_D(C)\\
&+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\bar{a}_k+\frac{\bar{b}_k}{1+t_k}\right)\cdot\alpha_D(C)=l\cdot\alpha_D(C)<\alpha_D(C).
\end{aligned}
$$

令 $n\to+\infty$, 并由 (4.2.57) 式可得

$$
\alpha_E\left(\frac{(AC)(t)}{1+t}\right)\leqslant l\cdot\alpha_D(C),\qquad \forall t\in J. \tag{4.2.58}
$$

同理可证

$$
\alpha_E((AC)'(t))\leqslant l\cdot\alpha_D(C),\qquad \forall t\in J.
$$

结合 (4.2.58) 并利用引理 4.2.10 即知

$$
\alpha_D(AC)\leqslant l\cdot\alpha_D(C)<\alpha_D(C).
$$

由 Daher 不动点定理和引理 4.2.8 即知 A 在 $B_D(\theta, R)$ 中存在一个不动点. 再由引理 4.2.7 知, 系统 (4.2.39) 至少有一个解属于 $PDC[J,E]\cap C^2[J',E]$. □

注 4.2.4 在纯量空间中, 去掉条件 (H_2), 结论仍成立. 关于此类系统多个解的存在性问题可参看 [43].

例 4.2.2 考虑二阶无穷脉冲微分系统边值问题

$$\begin{cases} -x_n''(t) = \dfrac{x_{n+1}(t)}{8(1+t)^3} + \dfrac{\sqrt{1+x_n(t)+x_{n+2}'(t)}}{n(1+t)^4}, & t\in J, \quad t\neq k, \\ \Delta x_n = \dfrac{1}{2^{k+3}}[x_n(k)+\sqrt{1+x_{n+3}'(k)}], & t=k, \\ \Delta x' = \dfrac{1}{3^{k+2}(k+1)}[x_{n+1}(k)+x_{2n}'(k)], & t=k,\ k=1,2,\cdots, \\ x_n(0) = x_{0n}, \quad x_n'(+\infty)=x_{\infty n}, \end{cases} \tag{4.2.59}$$

其中 $\sup\limits_{n\geqslant1}|x_{0n}|<+\infty$, $\sup\limits_{n\geqslant1}|x_{\infty n}|<+\infty$.

结论 系统 (4.2.59) 至少存在一个定义在 $J=[0,+\infty)$ 上的解.

证明 令 $E=l^\infty=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots):\sup\limits_{n\geqslant1}|x_n|<+\infty\}$, 并赋以范数 $\|x\|=\sup\limits_{n\geqslant1}|x_n|$. 则系统 (4.2.59) 可以看成系统 (4.2.39) 的形式, 这里 $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t),\cdots)$,

$$f=(f_1,f_2,\cdots,f_n,\cdots), \qquad f_n=g_n+h_n,$$

$$I_k=(I_{1k},I_{2k},\cdots,I_{nk},\cdots), \qquad H_k=(H_{1k},H_{2k},\cdots,H_{nk},\cdots), \tag{4.2.60}$$

其中

$$g_n(t,x,y)=\frac{x_{n+1}}{8(1+t)^3}, \qquad h_n(t,x,y)=\frac{\sqrt{1+x_n+y_{n+2}}}{n(1+t)^4}, \tag{4.2.61}$$

$$\begin{aligned} I_{nk}(x,y) &= \frac{1}{2^{k+3}}[x_n(k)+\sqrt{1+y_{n+3}(k)}], \\ H_{nk}(x,y) &= \frac{1}{3^{k+2}(k+1)}[x_{n+1}(k)+y_{2n}(k)]. \end{aligned} \tag{4.2.62}$$

显然, $f\in C[J\times E\times E,\ E]$, I_k, $H_k\in C[E\times E,\ E]$,

$$\|f(t,x,y)\|=\sup_{n\geqslant1}|f_n(t,x,y)|\leqslant\frac{\|x\|}{8(1+t)^3}+\frac{\|x\|}{(1+t)^4}+\frac{\|y\|}{(1+t)^4}+\frac{1}{(1+t)^4},$$

$$\|I_k(x.y)\|\leqslant\frac{1}{2^{k+3}}[\|x\|+\|y\|]+\frac{1}{2^{k+3}}, \qquad \|H_k(x,y)\|\leqslant\frac{1}{3^{k+2}(1+k)}[\|x\|+\|y\|].$$

这里

$$a(t)=\frac{1}{8(1+t)^3}+\frac{1}{(1+t)^4},\qquad b(t)=c(t)=\frac{1}{(1+t)^4},$$

$$a_k=b_k=\frac{1}{2^{k+3}},\qquad c_k=d_k=\frac{1}{3^{k+2}(1+k)},\qquad \tau_k=\frac{1}{2^{k+3}},\qquad \sigma_k=0.$$

所以

$$a^*=b^*=\frac{1}{8},\qquad c^*=\frac{1}{18},\qquad d^*\leqslant\frac{1}{36},$$

$$\int_0^{+\infty}[(1+t)a(t)+b(t)]dt+a^*+b^*+c^*+d^*\leqslant\frac{7}{8}+\frac{1}{12}<1,$$

故条件 (H_1) 满足. 下面验证 (H_2) 亦满足.

对任意 $t\in J$ 和任意有界可数集 D_1, D_2, 由 (4.2.61) 可以看出 $\alpha_E(g(t,D_1,D_2)\leqslant \frac{1}{8(1+t)^3}\alpha_E(D_1)$. 由于

$$\|h_n(t,x,y)\|\leqslant\frac{1}{n(1+t)^4}(1+\|x\|+\|y\|),\qquad \forall t\in J,\ x,y\in E, \tag{4.2.63}$$

类似于 [9] 中例 2.12 的证明可得

$$\alpha_E(h(t,D_1,D_2)=0,\qquad \forall t\in J,\ \text{任意有界可数集}D_1,D_2\subset E.$$

结合 (4.2.63) 可得 $\alpha_E(f(t,D_1,D_2))\leqslant\frac{1}{8(1+t)^3}\alpha_E(D_1)$, 相当于

$$l_1(t)=\frac{1}{8(1+t)^3},\quad l_2(t)=0,\qquad t\in J. \tag{4.2.64}$$

同理对任意 $t\in J$ 和任意有界可数集 D_1, D_2, 由 (4.2.61) 和 (4.2.62) 可得

$$\alpha_E(I_k(D_1,D_2))\leqslant\frac{1}{2^{k+3}}[\alpha_E(D_1)+\frac{1}{2}\alpha_E(D_2)],$$

$$\alpha_E(H_k(D_1,D_2))\leqslant\frac{1}{3^{k+2}(1+k)}[\alpha_E(D_1)+\alpha_E(D_2)],$$

即相当于 $\bar a_k=\frac{1}{2^{k+3}}, \bar b_k=\frac{1}{2^{k+4}}, \bar c_k=\bar d_k=\frac{1}{3^{k+2}(1+k)}$. 结合 (4.2.64) 可得

$$2\int_0^{+\infty}[(1+t)l_1(t)+l_2(t)]dt+\sum_{k=1}^{+\infty}[\bar a_k+\frac{\bar b_k}{1+t_k}+(1+t_k)\bar c_k+\bar d_k]$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{8(1+t)^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{3^{k+2}}+\frac{1}{3^{k+2}(1+k)}+\frac{1}{2^{k+3}}+\frac{1}{2^{k+4}(1+k)}\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}<1,$$

即 (H_2) 满足. 于是根据定理 4.2.5 可知结论成立.

§4.3 具有无穷延滞的脉冲泛函微分系统的边值问题

由于脉冲微分方程和泛函微分方程广泛的应用性，最近有一些作者开始关注同时具有延滞和脉冲的泛函微分方程

$$x'(t) = f(t, x_t)$$

的初值问题，就它的解的存在性和唯一性建立了一些结果 (参见 [1], [2], [4], [5], [16], [39] 及本书第一章). 在这里，我们考虑具有无穷延滞的半直线上的二阶脉冲泛函微分系统边值问题解的存在性、唯一性以及多解的存在性等问题. 具有有限时滞的这一类问题可类似讨论. 我们使用的主要工具为 Leray-Schauder 定理和不动点指数理论.

首先我们建立一些引理.

引理 4.3.1 设 $x : [a,b] \to R$ 为一个有界可测函数，则 $g(t) =: \sup\{|x(s)|, s \in [a,t]\}$ 为 $[a,b]$ 上的可测函数.

证明 任给 $\alpha > 0$, 令 $E = \{t \in [a,b],\ g(t) \geqslant \alpha\}$. 若 $t \in E$, 则对任意 $t' \geqslant t$ 有 $g(t') \geqslant \alpha$. 因此 E 为一个区间. 故 E 是可测的，即 $g(t)$ 为 $[a,b]$ 上的可测函数. □

下面定义几个赋范线性空间. 假设 $h : (-\infty, 0] \to (0,\ +\infty)$ 为一个连续函数，并且 $l = \int_{-\infty}^{0} h(t)dt < +\infty$. 对任意 $a > 0$, 定义

$$BM([-a,0]),R) = \{\psi : [-a,0] \to R|\ \psi(t)\text{在}[-a,0]\text{上有界可测}\},$$

并赋以范数 $\|\psi\|_{[-a,0]} = \sup_{s\in[-a,0]} |x(s)|$.

结合引理 4.3.1, 我们定义

$$BM_h((-\infty,0],R) = \Big\{\psi : (-\infty,0] \to R|\ \text{对任意 } c > 0, \psi|_{[-c,0]} \in BM([-c,0],R)$$
$$\text{且} \int_{-\infty}^{0} h(t)\|\psi\|_{[t,0]}dt < +\infty\Big\},$$

并赋以范数

$$\|\psi\|_h = \int_{-\infty}^{0} h(t)\|\psi\|_{[t,0]}dt < +\infty,$$

同时定义

$$PC([0,+\infty),R) = \Big\{\psi : [0,+\infty) \to R|\ \psi(t)\text{在 } t \neq t_k \text{ 处连续}, t = t_k$$
$$\text{处左连续、右极限存在 } (k = 1,2,\cdots,m)\Big\},$$

$$PC_l([0,+\infty),R) = \Big\{\psi : [0,+\infty) \to R|\ \psi(t)\text{在 } t \neq t_k \text{ 处连续}, t = t_k$$
$$\text{处左连续、右极限存在并且 } \lim_{t\to+\infty} x(t)\text{存在 } (k = 1,2,\cdots,m)\Big\}.$$

对线性空间 $PC_l([0,+\infty),R)$, 赋以范数

$$\|x\|_l = \sup_{t\in[0,+\infty)} |x(t)|.$$

容易看出 $BM_h((-\infty,0],R)$ 和 $PC_l([0,+\infty),R)$ 都为 Banach 空间.

有了以上准备, 我们考虑下述比较广泛的具有无穷延滞的半直线上的二阶脉冲泛函微分系统边值问题:

$$\begin{cases} (Lx)(t)+f(t,x_t)=0, & t\in(0,\ +\infty),\ t\neq t_k, \\ \Delta x\big|_{t=t_k}=I_k(x_{t_k}), & k=1,2,\cdots,m, \\ \lambda x(0)-\beta\lim\limits_{t\to0}p(t)x'(t)=a, & \\ \gamma x(\infty)+\delta\lim\limits_{t\to\infty}p(t)x'(t)=b, & \\ x(t)=\Phi(t),\qquad t\in(-\infty,0), & \\ x(t)\ \text{在}\ [0,+\infty)\ \text{上是有界的}, & \end{cases} \tag{4.3.1}$$

其中 $\Phi\in BM_h((-\infty,0],R)$. 对任意 $t\in(0,\ +\infty)$, $x\in PC_l([0,+\infty),R)$, x_t 定义为

$$x_t(s)=\begin{cases} x(t+s), & t\geqslant t+s\geqslant 0; \\ \Phi(t+s), & -\infty<t+s<0, \end{cases} \tag{4.3.2}$$

且 $f:(0,+\infty)\times BM_h((-\infty,0],R)\to R$, $I_k:BM_h((-\infty,0],R)\to R$, $k=1,2,\cdots,m$. $(Lx)(t)=:\dfrac{1}{p(t)}(p(t)x'(t))'$, $p\in C([0,+\infty),R)\bigcap C^1(0,+\infty)$, $p(t)>0$, $t\in(0,\infty)$,

$$\Delta x\big|_{t_k}=\lim_{\varepsilon\to0^+}[x(t_k+\varepsilon)-x(t_k-\varepsilon)],$$

$\lambda,\beta,\gamma,\delta\geqslant0$ 且 $\beta\gamma+\lambda\delta+\lambda\gamma>0$, $a,b\geqslant0$. 以下我们总是假设

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{p(t)}<+\infty, \tag{4.3.3}$$

并令 $\tau_0(t)=\displaystyle\int_0^t\frac{1}{p(s)}ds$, $\tau_\infty(t)=\displaystyle\int_t^\infty\frac{1}{p(s)}\,ds$, $\rho^2=\beta\gamma+\lambda\delta+\lambda\gamma\displaystyle\int_0^\infty\frac{1}{p(t)}dt$, $\rho>0$. 同时定义

$$u(t)=\frac{1}{\rho}[\delta+\gamma\tau_\infty(t)],\qquad v(t)=\frac{1}{\rho}[\beta+\lambda\tau_0(t)], \tag{4.3.4}$$

则 $\gamma v+\lambda u\equiv\rho$. 再令

$$G(t,s)=\begin{cases} u(t)v(s)p(s), & 0\leqslant s\leqslant t<\infty, \\ v(t)u(s)p(s), & 0\leqslant t\leqslant s<\infty, \end{cases} \tag{4.3.5}$$

则

$$\overline{G}(s)=:\lim_{t\to+\infty}G(t,s)=u(+\infty)v(s)p(s),\qquad s\in[0,+\infty). \tag{4.3.6}$$

令

$$e(t)=\frac{1}{\rho^2}[b\lambda\tau_0(t)+a\gamma\tau_\infty(t)]+\frac{1}{\rho^2}(a\delta+b\beta), \tag{4.3.7}$$

由 (4.3.4), (4.3.5) 和 (4.3.7) 式知, 存在 $t_m<a^*<b^*<+\infty$ 和 $1\geqslant c^*=c^*(a^*,b^*)>0$ 满足

$$G(t,s)\geqslant c^*G(u,s),\qquad \forall t\in[a^*,b^*],\ \forall u,s\in[0,+\infty), \tag{4.3.8}$$

$$e(t)\geqslant c^*e(s),\qquad \forall t\in[a^*,b^*],\ \forall s\in[0,+\infty), \tag{4.3.9}$$

$$\delta+\gamma\tau_\infty(t)\geqslant c^*[\delta+\gamma\tau_\infty(s)],\qquad \forall t\in[a^*,b^*],\forall s\in[0,+\infty). \tag{4.3.10}$$

令

$$Q=:\{x\in PC_l([0,+\infty),R^+):\ x(t)\geqslant c^*x(s),\forall t\in[a^*,b^*],\ \forall s\in[0,+\infty)\},$$

则 Q 为 $PC_l([0,+\infty),R)$ 的一个锥.

我们有下述引理.

引理 4.3.2 设 $x\in PC_l([0,+\infty),R)$ $(a>0)$, 且 x_t 由 (4.3.2) 式所定义. 则对任意 $t\in[0,+\infty)$ 有 $x_t\in BM_h((-\infty,0],R)$. 进一步,

$$l|x(t)|\leqslant\|x_t\|_h\leqslant\|\Phi\|_h+3l\sup_{s\in[0,t]}|x(s)|,$$

其中 $l=\int_{-\infty}^0 h(s)ds$.

证明 对任意 $a>0$ 和任意 $t\in[0,a]$, 容易看出, x_t 在 $[-a,0]$ 上是有界可测的且

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^0 h(s)\|x_t\|_{[s,0]}ds\\
=&\int_{-\infty}^{-t} h(s)\|x_t\|_{[s,0]}ds+\int_{-t}^0 h(s)\|x_t\|_{[s,0]}ds\\
\leqslant&\int_{-\infty}^{-t} h(s)\max\{\|x_0\|_{[t+s,0]},\|x_t\|_{[-t,0]}\}|ds+\int_{-t}^0 h(s)\|x\|_{[0,t]}ds\\
\leqslant&\int_{-\infty}^0 h(s)\|x_0\|_{[s,0]}ds+2\int_{-\infty}^0 h(s)ds\sup_{s\in[0,t]}|x(s)|\\
=&\|x_0\|_h+2l\sup_{s\in[0,t]}|x(s)|\\
\leqslant&\|\Phi\|_h+3l\sup_{s\in[0,t]}|x(s)|.
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

由于 $\Phi \in BM_h((-\infty,0],R)$, 则 $x_t \in BM_h((-\infty,0],R)$. 进一步,

$$\|x_t\|_h = \int_{-\infty}^{0} h(s)\|x_t\|_{[s,0]}ds \geqslant \int_{-\infty}^{0} h(s)ds|x(t)| = l|x(t)|,$$

这样就完成了引理的证明. □

注 4.3.1 一般来说, 对 $x \in PC_l([0,+\infty),R)$, x_t 在 $t \in [0,+\infty)$ 处是不一定连续的. 如令

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,t_1], \\ 1, & t \in (t_1,+\infty), \end{cases}$$

并假设 $t', t \in (t_1,+\infty)$ 且 $t > t'$. 则对任意 $s < -t$ 有 $\sup\limits_{r\in[s,0]} |x(t+r) - x(t'+r)| \geqslant 1$. 因此

$$\begin{aligned} &\|x_t - x_{t'}\|_h \\ =& \int_{-\infty}^{0} h(s)\|x_t - x_{t'}\|_{[s,0]}ds \\ \geqslant& \int_{-\infty}^{-t} h(s)\|x_t - x_{t'}\|_{[s,0]}ds \\ \geqslant& \int_{-\infty}^{-t} h(s)ds, \end{aligned}$$

这意味着 $\lim\limits_{t\to t'} \|x_t - x_{t'}\| \geqslant \int_{-\infty}^{-t'} h(s)ds$. 所以 x_t 在 t' 处不连续. 由 t' 在 $(t_1,+\infty)$ 中的任意性可知, x_t 在 $(t_1,+\infty)$ 上任意点处都不连续. 因此即使 $f(t,\psi)$ 在每个 $(t,\psi) \in (0,+\infty) \times BM_h((-\infty,0],R)$ 处连续, $f(t,x_t)$ 也可能不连续. 为了保证 $f(t,x_t)$ 的可积性, 需要给出合适的条件.

定义 4.3.1 函数 $G: BM_h((-\infty,0],R) \to R$ 称为在 $\phi_0 \in BM_h((-\infty,0],R)$ 处弱连续, 若对任意 $\{\phi_n\} \subseteq BM_h((-\infty,0],R)$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} \phi_n(s) = \phi_0(s)$, a.e. $s \in (-\infty,0]$, 且

$$\lim_{n\to+\infty} G(\phi_n) = G(\phi_0).$$

称 G 为在 $BM_h((-\infty,0],R)$ 上是弱连续的, 若 G 在任意 $\phi \in BM_h((-\infty,0],R)$ 处弱连续.

为方便起见, 以下将 $BM_h((-\infty,0],R)$ 简记为 BM_h.

定义 4.3.2 函数 $g: (0,+\infty) \times BM_h \to R$ 称为 $L \overset{w}{—}$Carathéodary 函数, 若下列条件满足:

(i) 对任意 $\psi \in BM_h$, $g(t,\psi)$ 是可测的;

(ii) 对几乎所有的 $t \in (0,+\infty)$, $\psi \to g(t,\psi)$ 关于 ψ 是弱连续的;

(iii) 对任意 $r > 0$, 存在 $\mu_r \in L((0,+\infty), R^+)$ 满足当 $\|\psi\|_h \leqslant r$ 时,

$$|g(s,\psi)| \leqslant \mu_r(s)$$

且

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \int_0^{+\infty} G(t,s)\mu_r(s)ds < +\infty$$

和

$$\int_0^{+\infty} \overline{G}(s)\mu_r(s)ds < +\infty.$$

引理 4.3.3 假设 $D \subseteq PC_l([0,+\infty), R)$ 是有界的. 则存在 $r > 0$, 满足

$$\|x_t\|_h \leqslant r, \qquad \forall x \in D,\ \forall t \in [0,+\infty).$$

证明 由于 D 是有界的, 所以存在 $d > 0$, 满足 $\|x\|_l \leqslant d$, $\forall x \in D$. 利用引理 4.3.2 可知, 对任意 $t \in [0,+\infty)$, 有

$$\|x_t\|_h \leqslant \|\varPhi\|_h + 3l \sup_{s\in[0,t]} |x(s)| \leqslant \|\varPhi\|_h + 3ld.$$

令 $r = \|\varPhi\|_h + 3ld$, 则 r 即满足要求. □

引理 4.3.4 设 $g : (0,+\infty) \times BM_h \to R$ 为 $L\text{—}^{w}\text{—}$Carathéodary 函数, 且 $x \in PC_l([0,+\infty), R)$, 则 $g(t,x_t)$ 是可测的.

证明 对 $\forall t \in (-\infty, 0)$, 定义 $x(t) = \varPhi(t)$. 则存在连续函数序列 $\{x_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to+\infty} x_n(t) = x(t), \qquad \forall t \in (-\infty,+\infty).$$

由 [38] 中的引理 4 可知, x_{nt} 在 $t \in [0,+\infty)$ 处连续. 由于 $g : (0,+\infty) \times BM_h \to R$ 为 $L\text{—}^{w}\text{—}$Carathéodary 函数, 故 $g(t,x_{nt})$ 在 $[0,+\infty)$ 上可测. 同时 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{nt}(s) = x_t(s)$, $\forall s \in (-\infty, 0]$, 所以

$$\lim_{n\to+\infty} g(t,x_{nt}) = g(t,x_t), \qquad \forall t \in [0,+\infty).$$

因而 $g(t,x_t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可测. □

利用引理 4.3.4 和 [11], [21] 所使用的常规方法, 可得下述引理.

引理 4.3.5 设 f 为 $L\text{—}^{w}\text{—}$Carathéodary 函数, 若 x 满足方程

$$x(t) = e(t) + (Ax)(t) + (Bx)(t), \tag{4.3.12}$$

则 x 为方程 (4.3.1) 的一个解，其中

$$(Ax)(t) =: \int_0^{+\infty} G(t,s)f(s,x_s)ds,$$

$$(Bx)(t) =: [\delta + \gamma\tau_\infty(t)] \sum_{0<t_k<t} \frac{I_k(x_{t_k})}{\delta + \gamma\tau_\infty(t_k)}.$$

定理 4.3.1(二择一定理)　设 C 为赋范线性空间 E 的一个凸子集，U 为 C 的一个开子集，$p^* \in U$, $N : \overline{U} \to C$ 全连续，则下面两条至少有一条成立：

(i) N 有一个不动点；

(ii) 存在 $x \in \partial U$, 满足 $x = (1-\overline{\lambda})p^* + \overline{\lambda}Nx$ 对某些 $0 < \overline{\lambda} < 1$ 成立.

下述结论为 Corduneanu 定理 [3] 的一个简单改进.

定理 4.3.2　设 $M \subseteq PC_l([0,+\infty),R)$. 则 M 为 $PC_l([0,+\infty),R)$ 的一个紧子集，若下面条件满足：

(i) M 在 PC_l 中有界；

(ii) 在 $[0,+\infty)$ 的任何有限子区间上，M 分段等度连续；

(iii) M 等度收敛，亦即任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $T(\varepsilon) > 0$, 当 $t \geqslant T(\varepsilon)$ 时，对一切 $f \in M$, $|f(t) - f(+\infty)| < \varepsilon$.

1. 解的存在性和唯一性

为方便起见，先列出下列条件：

(H_1) f 为 $L\text{—}\overset{w}{\text{—}}$Carathéodary 函数；

(H_2) $I_k \in C(BM_h, R)$ 是有界的，$k = 1, 2, \cdots, m$.

由引理 4.3.4 的证明可知，对任意 $x \in PC_l([0,+\infty),R^+)$, 可以定义

$$(Jx)(t) = e(t) + (Ax)(t) + (Bx)(t), \qquad t \in [0,+\infty). \tag{4.3.13}$$

引理 4.3.6　假设 (H_1) 和 (H_2) 满足，则 $J : PC_l([0,+\infty),R) \to PC_l([0,+\infty),R)$ 为全连续的.

证明　首先需要证明对任意 $x \in PC_l([0,+\infty),R)$ 有 $Jx \in PC_l([0,+\infty),R)$. 利用 $x \in PC_l([0,+\infty),R)$ 和引理 4.3.3, 存在一个 $r > 0$, 满足 $|f(t,x_t)| \leqslant \mu_r(t)$. 对任意 $t, t' \in [0,+\infty)$, 当 $t < t'$ 时，有

$$\begin{aligned}
&|(Jx)(t) - (Jx)(t')| \\
= &|e(t) - e(t') + (Ax)(t) - (Ax)(t') + (Bx)(t) - (Bx)(t')| \\
\leqslant &|e(t) - e(t')| + \int_0^{+\infty} |G(t,s) - G(t',s)||f(s,x_s)|ds + \\
&|\gamma\tau_\infty(t') - \gamma\tau_\infty(t)| \sum_{0<t_k<t} \frac{|I_k(x_{t_k})|}{\delta + \gamma\tau_\infty(t_k)} + |\delta + \gamma\tau_\infty(t')| \sum_{t \leqslant t_k < t'} \frac{|I_k(x_{t_k})|}{\delta + \gamma\tau_\infty(t_k)}
\end{aligned}$$

$$\leqslant |e(t)-e(t')|+\int_0^{+\infty}|G(t,s)-G(t',s)|\mu_r(s)ds+$$

$$|\gamma\tau_\infty(t')-\gamma\tau_\infty(t)|\sum_{0<t_k<t}\frac{|I_k(x_{t_k})|}{\delta+\gamma\tau_\infty(t_k)}+|\delta+\gamma\tau_\infty(t')|\sum_{t\leqslant t_k<t'}\frac{|I_k(x_{t_k})|}{\delta+\gamma\tau_\infty(t_k)}.$$

由定义 4.3.2 的 (iii) 可知

$$\int_0^{+\infty}|G(t,s)-G(t',s)|\mu_r(s)ds\leqslant 2\sup_{t\in[0,+\infty)}\int_0^{+\infty}G(t,s)\mu_r(s)ds,$$

则由勒贝格控制收敛定理可得

$$\lim_{t\to t'-}(Jx)(t)=(Jx)(t'),\qquad \forall t'\in[0,+\infty). \tag{4.3.14}$$

类似地，容易看出

$$\lim_{t\to t'+}(Jx)(t)=(Jx)(t'),\qquad \forall t'\in[0,+\infty)\text{ 且 }t'\neq t_k,k=1,2,\cdots,t_m$$

和 $(Jx)(t_k^+)$ 存在， $k=1,2,\cdots,m$. 下面证明

$$\lim_{t\to+\infty}(Jx)(t)=e(+\infty)+\int_0^{+\infty}\overline{G}(s)f(s,x_s)ds+\delta\sum_{k=1}^m\frac{I_k(x_{t_k})}{\delta+\gamma\tau_\infty(t_k)}.$$

设 $t>t_m$, 则

$$|(Jx)(t)-e(+\infty)+\int_0^{+\infty}\overline{G}(s)f(s,x_s)ds+\delta\sum_{k=1}^m\frac{I_k(x_{t_k})}{\delta+\gamma\tau_\infty(t_k)}|$$

$$\leqslant|e(t)-e(+\infty)|+\int_0^{+\infty}|G(t,s)-\overline{G}(s)||f(s,x_s)|ds+\gamma|\tau_\infty(t)|\sum_{k=1}^m\frac{|I_k(x_{t_k})|}{\delta+\gamma\tau_\infty(t_k)}.$$

由定义 4.3.2 的 (iii) 可知

$$\int_0^{+\infty}|G(t,s)-\overline{G}(s)||f(s,x_s)|ds\leqslant\sup_{t\in[0,+\infty)}\int_0^{+\infty}G(t,s)\mu_r(s)ds+\int_0^{+\infty}\overline{G}(s)\mu_r(s)ds.$$

利用勒贝格控制收敛定理可得

$$|(Jx)(t)-e(+\infty)+\int_0^{+\infty}\overline{G}(s)f(s,x_s)ds+\delta\sum_{k=1}^m\frac{I_k(x_{t_k})}{\delta+\gamma\tau_\infty(t_k)}|\to 0,\qquad t\to+\infty.$$

因此， $Jx\in PC_l([0,+\infty),R)$.

其次证明 $J:PC_l([0,+\infty),R)\to PC_l([0,+\infty),R)$ 是连续的. 设 $y^{(n)}$, $y^{(0)}\in PC_l([0,+\infty),R)$ 且 $y^{(n)}\to y^{(0)}$. 下证在 $PC_l([0,+\infty),R)$ 中有 $Jy^{(n)}\to Jy^{(0)}$. 由于

$y^{(n)} \to y^{(0)}$, 所以 $\{y^{(0)}, y^{(1)}, \cdots, y^{(n)}, \cdots\}$ 在 $PC_l([0,+\infty), R)$ 中是有界的. 利用引理 4.3.3, 存在 $r > 0$, 满足

$$\|y_t^{(n)}\|_h \leqslant r, \|y_t^{(0)}\|_h \leqslant r, \qquad \forall n \geqslant 1, \ \forall t \geqslant 0.$$

由 (H_1) 知存在 $\mu_r \in L((0,+\infty), R^+)$, 满足对任意 $\|\psi\|_h \leqslant r$, 有 $|f(t,\psi)| \leqslant \mu_r(t)$,

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \int_0^{+\infty} G(t,s)\mu_r(s)ds < +\infty$$

和

$$\int_0^{+\infty} \overline{G}(s)\mu_r(s) < +\infty.$$

注意到

$$\begin{aligned}|(Jy^{(n)})(+\infty) - (Jy^{(0)})(+\infty)| \leqslant & \int_0^{+\infty} \overline{G}(s)|f(s,y_s^{(n)}) - f(s,y_s^{(0)})|ds \\ & + \delta \sum_{k=1}^{m} \frac{|I_k(y_{t_k}^{(n)}) - I_k(y_{t_k}^{(0)})|}{\delta + \gamma\tau_\infty(t_k)}.\end{aligned}$$

由 $y^{(n)} \to y^{(0)}$ 并由引理 4.3.2 的证明可知, 对任意 $t \in [0,+\infty)$, 有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \|y_t^{(n)} - y_t^{(0)}\|_h &= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^0 h(s)\|y_t^{(n)} - y_t^{(0)}\|_{[s,0]}ds \\ &\leqslant \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^0 h(s)ds \sup_{s\in[0,t]} |y^{(n)}(s) - y^{(0)}(s)| \\ &\leqslant \lim_{n\to+\infty} l\|y^{(n)} - y^{(0)}\|_l \\ &= 0.\end{aligned}$$

再利用勒贝格控制收敛定理可得

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \overline{G}(s)|f(s,y_s^{(n)}) - f(s,y_s^{(0)})|ds = 0.$$

因为 $I_k : BM_h \to R$ 是连续的, $k = 1, 2, \cdots, m$, 所以

$$\lim_{n\to+\infty} \delta \sum_{k=1}^{m} \frac{|I_k(y_{t_k}^{(n)}) - I_k(y_{t_k}^{(0)})|}{\delta + \gamma\tau_\infty(t_k)} = 0,$$

进而

$$\lim_{n\to+\infty} |(Jy^{(n)})(+\infty) - (Jy^{(0)})(+\infty)| = 0.$$

故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N_0\geqslant 1$ 满足当 $n\geqslant N_0$ 时有

$$|(Jy^{(n)})(+\infty)-(Jy^{(0)})(+\infty)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.3.15}$$

同时，当 $t>t_m$ 时，

$$\begin{aligned}&|(Jy^{(n)})(t)-(Jy^{(n)})(+\infty)|\\ \leqslant\ &|e(t)-e(+\infty)|+\int_0^{+\infty}|G(t,s)-\overline{G}(s)||f(s,y_s^{(n)})|ds\\ &+\gamma|\tau_\infty(t)|\sum_{k=1}^{m}\frac{|I_k(y_{t_k}^{(n)})|}{\delta+\gamma\tau_\infty(t_k)}\\ \leqslant\ &|e(t)-e(+\infty)|+\int_0^{+\infty}|G(t,s)-\overline{G}(s)|\mu_r(s)ds\\ &+|\gamma\tau_\infty(t)|\sum_{k=1}^{m}\frac{|I_k(y_{t_k}^{(n)})|}{\delta+\gamma\tau_\infty(t_k)}\to 0,\qquad t\to+\infty.\end{aligned}$$

类似地有

$$|(Jy^{(0)}(t)-(Jy^{(0)})(+\infty)|\to 0,\qquad t\to+\infty.$$

因此存在 $T_0\geqslant t_m$ 满足对任意 $t\geqslant T_0$ 和 $n\geqslant 1$ 有

$$|(Jy^{(n)})(t)-(Jy^{(n)})(+\infty)|<\frac{\varepsilon}{3},\qquad |(Jy^{(0)})(t)-(Jy^{(0)})(+\infty)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.3.16}$$

结合 (4.3.15) 和 (4.3.16) 可得存在 $N_0\geqslant 1$ 和 $T_0>t_m$, 满足对任意 $n\geqslant N_0$, 有

$$|(Jy^{(n)})(t)-(Jy^{(0)})(t)|<\varepsilon,\qquad \forall t\geqslant T_0. \tag{4.3.17}$$

令 $\bar{I}_1=[0,t_1]$, $\bar{I}_2=(t_1,t_2]$, $\cdots$, $\bar{I}_m=(t_{m-1},t_m]$, $\bar{I}_{m+1}=(t_m,T_0]$. 对 $t\in\bar{I}_1$, 有

$$|(Jy^{(n)})(t')-(Jy^{(n)})(t'')|\leqslant|e(t')-e(t'')|+\int_0^{+\infty}|G(t',s)-G(t'',s)|\mu_r(s)ds. \tag{4.3.18}$$

因此 $\{Jy^{(n)}\}$ 在 $\bar{I}_1$ 上等度连续. 完全类似地，$\{Jy^{(n)}\}$ 在 $\bar{I}_k$ 上也是等度连续的, $k=1,2,\cdots,m+1$. 另一方面，由勒贝格控制收敛定理，对任意 $t\in[0,T_0]$, 有

$$\begin{aligned}|(Jy^{(n)})(t)-(Jy^{(0)})(t)|\leqslant&\int_0^{+\infty}G(t,s)|f(s,y_s^{(n)})-f(s,y_s^{(0)})|ds\\ &+|\delta+\gamma\tau_\infty(t)|\sum_{k=1}^{m}\frac{|I_k(y_{t_k}^{(n)})-I_k(y_{t_k}^{(0)})|}{\delta+\gamma\tau_\infty(t_k)}\to 0,\\ &n\to+\infty.\end{aligned} \tag{4.3.19}$$

结合 (4.3.18) 和 (4.3.19), 并利用 $[0,T_0]$ 的紧性可得存在 N_1, 满足当 $n \geqslant N_1$ 时, 有

$$|(Jy^{(n)})(t) - (Jy^{(0)})(t))| < \varepsilon, \qquad \forall t \in [0,T_0].$$

令 $N = \max\{N_0, N_1\}$. 则当 $n \geqslant N$ 时,

$$|(Jy^{(n)})(t) - (Jy^{(0)})(t)| < \varepsilon, \qquad \forall t \in [0,T_0], \tag{4.3.20}$$

亦即

$$\|Jy^{(n)} - Jy^{(0)}\|_l \leqslant \varepsilon.$$

所以 $Jy^{(n)} \to Jy^{(0)}\ \ (n \to +\infty)$.

最后证明 $J: PC_l([0,+\infty),R) \to PC_l([0,+\infty),R)$ 是全连续的. 设 $\Omega \subseteq PC_l([0,+\infty),R)$ 是有界的. 由引理 4.3.3 可知存在 $r>0$, 满足对任意 $x\in\Omega, t\in[0,+\infty)$, 有 $\|x_t\| \leqslant r$. 由条件 (H_1) 知存在 $\mu_r \in L$, 满足 $|f(t,\psi)| \leqslant \mu_r(t)$ 对 $\|\psi\|_h \leqslant r$ 和 $t\in(0,+\infty)$ 成立. 因此对 $x\in\Omega$, 有

$$\begin{aligned}|(Jx)(t)| &\leqslant |e(t)| + \int_0^{+\infty} G(t,s)\mu_r(s)ds + [\delta + \gamma\tau_\infty(t)]\sum_{0<t_k<t}\frac{|I_k(x_{t_k})|}{\delta+\gamma\tau_\infty(t_k)}\\ &\leqslant \|e\|_l + \sup_{t\in[0,+\infty)}\int_0^{+\infty} G(t,s)\mu_r(s)ds + \sup_{t\in[0,+\infty)}(Bx)(t) = M_0.\end{aligned}$$

由类似于 (4.3.18) 和 (4.3.15) 的证明过程并结合定理 4.3.2 可得 $J: PC_l([0,+\infty),R) \to PC_l([0,+\infty),R)$ 是全连续的. □

定理 4.3.3　假设 (H_1) 和 (H_2) 成立. 另设存在 $M>0$, 满足对任意 $\overline{\lambda}\in(0,1)$, 若 y 为下列方程的解,

$$\begin{cases}(Lx)(t) + \overline{\lambda} f(t,x_t) = 0, & t\neq t_k,\\ \Delta x\big|_{t=t_k} = \overline{\lambda} I_k(x_{t_k}), & k=1,2,\cdots,m,\\ \lambda x(0) - \beta\lim\limits_{t\to 0}p(t)x'(t)(t) = a, & \\ \gamma x(\infty) + \delta\lim\limits_{t\to\infty}p(t)x'(t)(t) = b, & \\ x(t) = \Phi(t), t\in(-\infty,0), & \\ x(t)\ \text{在}\ [0,+\infty)\ \text{上有界}, & \end{cases} \tag{4.3.21}$$

有 $\|y\|_l \neq M$, 其中 $\Phi\in BM_h$ 且 x_t 由 (4.3.2) 式定义, 则方程 (4.3.1) 至少有一个解.

证明　对 $x\in PC_l([0,+\infty),R)$, 算子 $J: PC_l([0,+\infty),R) \to PC_l([0,+\infty),R)$ 由 (4.3.13) 式定义. 据引理 4.3.6, J 为一个全连续算子.

令 $\Omega = \{x\in PC_l([0,+\infty),R), \|x\|_l < M\}$. 利用定理 4.3.1 可得 J 在 Ω 中有一个不动点, 亦即方程 (4.3.1) 至少有一个解. □

由定理 4.3.3, 可得下述结论.

定理 4.3.4 假设 (H_1) 和 (H_2) 成立. 另设

(i) 存在连续不减函数 $f_1:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $q\in L[0,\ +\infty)$ 满足

$$|f(t,\phi)|\leqslant q(t)f_1(\|\phi\|_h),\qquad \forall t\in[0,+\infty),\ \forall\phi\in BM_h,$$

其中 $f_1(u)>0$, $\forall u>0$; $q(t)>0$, a.e. $t\in[0,+\infty)$;

(ii) 存在连续不减函数 $P_k:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $k=1,2,\cdots,m$, 满足

$$|I_k(\psi)|\leqslant P_k(\|\psi\|_h),\qquad \forall\psi\in BM_h,\ k=1,2,\cdots,m;$$

(iii)

$$\sup_{c\in(0,+\infty)}\frac{c}{\|e\|_l+q_0f_1(\|\varPhi\|_h+3lc)+[\delta+\gamma\tau_\infty(0)]\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{P_k(\|\varPhi\|_h+3lc)}{\delta+\gamma\tau_\infty(t_k)}}>1,$$

其中 $q_0=\sup\limits_{t\in[0,+\infty)}\int_0^{+\infty}G(t,s)q(s)ds<+\infty$,

则方程 (4.3.1) 在 $PC_l([0,+\infty),R)$ 中至少有一个解.

证明 令 $M_0>0$ 满足

$$\frac{M_0}{\|e\|_l+q_0f_1(\|\varPhi\|_h+3lM_0)+[\delta+\gamma\tau_\infty(0)]\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{P_k(\|\varPhi\|_h+3lM_0)}{\delta+\gamma\tau_\infty(t_k)}}>1.$$

设 $\lambda_0\in(0,1)$, 并设 y 为方程 (4.3.21) 当 $\bar\lambda=\lambda_0$ 时的解, 则对 $\forall t\in[0,+\infty)$, 有

$$\begin{aligned}|y(t)|&\leqslant|e(t)|+|(Ay)(t)|+|(By)(t)|\\&\leqslant|e(t)|+\int_0^{+\infty}G(t,s)q(s)f_1(\|y_s\|_h)ds+|\delta+\gamma\tau_\infty(t)|\sum_{0<t_k<t}\frac{P_k(\|y_{t_k}\|_h)}{\delta+\gamma\tau_\infty(t_k)}\\&\leqslant\|e\|_l+\int_0^{+\infty}G(t,s)q(s)f_1(\|\varPhi\|_h+3lM_1)ds\\&\quad+[\delta+\gamma\tau_\infty(t)]\sum_{0<t_k<t}\frac{P_k(\|\varPhi\|_h+3lM_1)}{\delta+\gamma\tau_\infty(t_k)}\\&\leqslant\|e\|_l+q_0f_1(\|\varPhi\|_h+3lM_1)+[\delta+\gamma\tau_\infty(0)]\sum_{k=1}^{m}\frac{P_k(\|\varPhi\|_h+3lM_1)}{\delta+\gamma\tau_\infty(t_k)}.\end{aligned}$$

设 $\|y\|_l=M_1$, 则

$$M_1=\sup_{t\in[0,+\infty)}|y(t)|\leqslant\|e\|_l+q_0f_1(\|\varPhi\|_h+3lM_1)+[\delta+\gamma\tau_\infty(0)]\sum_{k=1}^{m}\frac{P_k(\|\varPhi\|_h+3lM_1)}{\delta+\gamma\tau_\infty(t_k)},$$

这意味着

$$\frac{M_1}{\|e\|_l + q_0 f_1(\|\Phi\|_h + 3lM_1) + [\delta + \gamma\tau_\infty(0)] \sum_{k=1}^{m} \frac{P_k(\|\Phi\|_h + 3lM_1)}{\delta + \gamma\tau_\infty(t_k)}} \leqslant 1.$$

所以 $M_1 \neq M_0$, 即定理 4.3.3 的条件满足. 故方程 (4.3.1) 在 $PC_l([0,+\infty),R)$ 中至少有一个解. □

定理 4.3.5　假设 (H_1) 和 (H_2) 成立. 另设存在 $q \in L[0,\ +\infty)$ 和 $c_1,\cdots,\ c_m$, 满足

$$|f(t,\psi) - f(t,\phi)| \leqslant q(t)\|\psi - \phi\|_h,\ |I_k(\psi) - I_k(\phi)| \leqslant c_k\|\psi - \phi\|_h,$$
$$\forall \psi, \phi \in BM_h,\ k = 1,2,\cdots,m$$

且

$$k = l\left(\sup_{t\in[0,+\infty)} \int_0^{+\infty} G(t,s)q(s)ds + [\delta + \gamma\tau_\infty(0)] \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{\delta + \gamma\tau_\infty(t_k)}\right) < 1,$$

则方程 (4.3.1) 有唯一解.

证明　对 $x, y \in PC_l([0,+\infty),R)$, 由引理 4.3.2 的证明过程可得

$$\|x_t - y_t\|_h = \int_0^{+\infty} h(s)\|x_t - y_t\|_{[s,0]}ds \leqslant l\|x - y\|_l, \qquad \forall t \geqslant 0.$$

因此

$$\begin{aligned}
&|(Jx)(t) - (Jy)(t)| \\
\leqslant& \int_0^{+\infty} G(t,s)|f(s,x_s) - f(s,y_s)|ds + [\delta + \gamma\tau_\infty(t)] \sum_{0<t_k<t} \frac{|I_k(x_{t_k}) - I_k(y_{t_k})|}{\delta + \gamma\tau_\infty(t_k)} \\
\leqslant& \int_0^{+\infty} G(t,s)q(s)\|x_s - y_s\|_h ds + [\delta + \gamma\tau_\infty(t)] \sum_{0<t_k<t} \frac{c_k\|x_{t_k} - y_{t_k}\|_h}{\delta + \gamma\tau_\infty(t_k)} \\
\leqslant& \int_0^{+\infty} G(t,s)q(s)dsl\|x - y\|_l + [\delta + \gamma\tau_\infty(t)] \sum_{0<t_k<t} \frac{lc_k\|x_{t_k} - y_{t_k}\|_h}{\delta + \gamma\tau_\infty(t_k)} \\
\leqslant& k\|x - y\|_l.
\end{aligned}$$

所以

$$\|Jx - Jy\|_l = \sup_{t\in[0,+\infty)} |(Jx)(t) - (Jy)(t)| \leqslant k\|x - y\|_l,$$

即 $J : PC_l([0,+\infty),R) \to PC_l([0,+\infty),R)$ 是一个压缩映象. 由此可得 J 在 PC_l $([0,+\infty),R)$ 中存在唯一不动点，亦即方程 (4.3.1) 有唯一解. □

2. 多重解的存在性

令 $Q_h=\{x\in BM_h\colon x(t)\geqslant 0,\ \forall t\in(-\infty,0]\}$. 利用不动点指数理论，可得下面的多解存在性结果.

定理 4.3.6 假设 (H_1) 和 (H_2) 成立. 另设 $f:(0,+\infty)\times Q_h\to[0,+\infty)$ 和 $I_k:Q_h\to[0,+\infty)$ 满足

(i) 存在连续不减函数 $f_1,f_2:[0,+\infty)\to R^+$ 和两个非负函数 $q,\overline{q}\in L[0,\ +\infty)$ 满足

$$\overline{q}(t)f_2(|\phi(0)|)\leqslant f(t,\phi)\leqslant q(t)f_1(\|\phi\|_h),\qquad \forall t\in(0,+\infty),\phi\in BM_h,$$

其中当 $u>0$ 时， $f_1(u)>0$, $f_2(u)>0$ 并对几乎所有的 $t\in[0,+\infty)$ 有 $q(t)>0$, $\overline{q}(t)>0$;

(ii) 存在连续不减函数 $P_k:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $k=1,2,\cdots,m$, 满足

$$I_k(\psi)\leqslant P_k(\|\psi\|_h),\qquad \forall\psi\in Q_h,\ k=1,2,\cdots,m;$$

(iii)

$$\sup_{c\in(0,+\infty)}\frac{c}{\|e\|_l+q_0f_1(\|\varPhi\|_h+3lc)+[\delta+\gamma\tau_\infty(0)]\displaystyle\sum_{k=1}^m\frac{P_k(\|\varPhi\|_h+3lc)}{\delta+\gamma\tau_\infty(t_k)}}>1,$$

其中 $q_0=\sup\limits_{t\in[0,+\infty)}\displaystyle\int_0^{+\infty}G(t,s)q(s)ds<+\infty$;

(iv)

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{f_2(u)}{u}=+\infty,\tag{4.3.22}$$

则方程 (4.3.1) 在 $PC_l([0,+\infty),R)$ 中至少有两个非负解.

证明 首先证明 $JQ\subseteq Q$. 容易看出当 $x\in Q$ 时有 $(Jx)(t)\geqslant 0$, $\forall t\in[0,+\infty)$, 利用 (4.3.8), (4.3.9) 和 (4.3.10), 对 $t\in[a^*,b^*]$, 有

$$\begin{aligned}(Jx)(t)&=e(t)+\int_0^{+\infty}G(t,s)f(s,x(s))ds+[\delta+\gamma\tau_\infty(t)]\sum_{k=1}^m\frac{I_k(x_{t_k})}{\delta+\gamma\tau_\infty(t_k)}\\&\geqslant c^*\left[e(u)+\int_0^{+\infty}G(u,s)f(s,x(s))ds+[\delta+\gamma\tau_\infty(u)]\sum_{k=1}^m\frac{I_k(x_{t_k})}{\delta+\gamma\tau_\infty(t_k)}\right]\\&=c^*(Jx)(u),\qquad\forall u\in[0,+\infty).\end{aligned}$$

因此， $JQ\subseteq Q$.

由条件 (iii), 可选取 $M_0 > 0$, 满足

$$\frac{M_0}{\|e\|_l + q_0 f_1(\|\Phi\|_h + 3lM_0) + [\delta + \gamma\tau_\infty(0)] \sum\limits_{0<t_k<t} \dfrac{P_k(\|\Phi\|_h + 3lM_0)}{\delta + \gamma\tau_\infty(t_k)}} > 1. \quad (4.3.23)$$

利用条件 (iv) 可知存在 $M_1 > M_0$, 满足

$$f_2(u) \geqslant N^* u, \qquad \forall u \geqslant M_1, \quad (4.3.24)$$

其中

$$N^* > \left(c^* \inf_{t\in[a^*,b^*]} \int_{a^*}^{b^*} G(t,s)q(s)ds \right)^{-1}.$$

令 $M' = \max\left\{ M_1, \dfrac{2M_0}{c^*} \right\}$ 并定义

$$\Omega_1 = \{x \in PC_l([0,+\infty),R) \big| \, \|x\|_l < M_0\},$$

$$\Omega_2 = \{x \in PC_l([0,+\infty),R) \big| \, \|x\|_l < M'\}.$$

若存在 $\lambda_0 \in (0,1]$ 和 $x \in \partial\Omega_1 \cap Q$, 满足 $x = \lambda_0 Ax$, 则对 $\forall t \in [0,+\infty)$, 有

$$\begin{aligned}
&|x(t)| \\
\leqslant\ & |e(t)| + |(Ax)(t)| + |(Bx)(t)| \\
\leqslant\ & |e(t)| + \int_0^{+\infty} G(t,s)q(s)f_1(\|x_s\|_l)ds + [\delta + \gamma\tau_\infty(t)] \sum_{0<t_k<t} \frac{P_k(\|x_{t_k}\|_h)}{\delta + \gamma\tau_\infty(t_k)} \\
\leqslant\ & \|e\|_l + \int_0^{+\infty} G(t,s)q(s)f_1(\|\Phi\|_h + 3lM_0)ds + [\delta + \gamma\tau_\infty(t)] \sum_{0<t_k<t} \frac{P_k(\|\Phi\|_h + 3lM_0)}{\delta + \gamma\tau_\infty(t_k)} \\
\leqslant\ & \|e\|_l + q_0 f_1(\|\Phi\|_h + 3lM_0) + [\delta + \gamma\tau_\infty(0)] \sum_{k=1}^{m} \frac{P_k(\|\Phi\|_h + 3lM_0)}{\delta + \gamma\tau_\infty(t_k)}.
\end{aligned}$$

因此

$$M_0 = \sup_{t\in[0,+\infty)} |x(t)| \leqslant \|e\|_l + q_0 f_1(\|\Phi\|_h + 3lM_0) + [\delta + \gamma\tau_\infty(0)] \sum_{k=1}^{m} \frac{P_k(\|\Phi\|_h + 3lM_0)}{\delta + \gamma\tau_\infty(t_k)},$$

这意味着

$$\frac{M_0}{\|e\|_l + q_0 f_1(\|\Phi\|_h + 3lM_0) + [\delta + \gamma\tau_\infty(0)] \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{P_k(\|\Phi\|_h + 3lM_0)}{\delta + \gamma\tau_\infty(t_k)}} \leqslant 1.$$

这与 (4.2.23) 矛盾. 故对任意 $x \in \partial\Omega_1 \cap Q$ 和任意 $\overline{\lambda} \in (0,1]$, $x \neq \overline{\lambda}Jx$. 所以

$$i(J, Q \cap \Omega_1, Q) = 1. \tag{4.3.25}$$

另一方面, 对 $x \in \partial\Omega_2 \cap Q$, 若 $(Jx)(t) \leqslant x(t)$, $t \in [0,+\infty)$, 则当 $t \in [a^*, b^*]$ 时有

$$\begin{aligned}
x(t) &\geqslant (Jx)(t) \\
&\geqslant \int_0^{+\infty} G(t,s)f(s,x_s)ds \\
&\geqslant \int_0^{+\infty} G(t,s)\overline{q}(s)f_2(x(s))ds \\
&\geqslant \int_{a^*}^{b^*} G(t,s)\overline{q}(s)f_2(x(s))ds \\
&> \int_{a^*}^{b^*} G(t,s)\overline{q}(s)N^*x(s)ds \\
&\geqslant \int_{a^*}^{b^*} G(t,s)\overline{q}(s)dsN^*c^*\|x\|_l \\
&> \|x\|_l.
\end{aligned}$$

这是一个矛盾. 故对任意 $x \in \partial\Omega_2 \cap Q$, $Jx \nleqslant x$, 这意味着

$$i(J, \Omega_2 \cap Q, Q) = 0. \tag{4.3.26}$$

这样

$$i(J, (\Omega_2 - \overline{\Omega_1}) \cap Q, Q) = -1. \tag{4.3.27}$$

利用 (4.3.25) 和 (4.3.27) 可知, J 有不动点 $x_1 \in \Omega_1 \cap Q$ 和不动点 $x_2 \in (\Omega_2 - \overline{\Omega_1}) \cap Q$, 亦即 x_1 和 x_2 为方程 (4.3.1) 的非负解. □

3. 一些例子

例 4.3.1 考虑下述问题

$$\begin{cases}
x''(t) + \dfrac{it^{i-1}}{1+t^i}x'(t) + \phi(t)\left(\ln\left(2 + \displaystyle\int_{-\infty}^0 e^s|x_t(s)|ds\right) + x^{\frac{1}{3}}(t) + x^{\frac{1}{5}}(t-1)\right) = 0, \\
\qquad t \in (0,1) \cup (1,+\infty), \\
\Delta x|_{t=1} = \ln\left(1 + \displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{2s}|x_1(s)|ds\right), \\
x(t) = \Phi(t),\ t \in (-\infty, 0], \\
x(0) = 0,\ \displaystyle\lim_{t\to+\infty}(1+t^i)x'(t) = 0,
\end{cases} \tag{4.3.28}$$

其中

$$\phi(t) = \begin{cases}
\dfrac{1}{200}t^{-\frac{1}{2}}, & t \in (0,1], \\
\dfrac{1}{50(1+t^i)^2}, & t \in (1,+\infty).
\end{cases}$$

$i > 1$, $\Phi(t) = t \cdot \mathrm{sgn}(\cos t)$, $\quad t \in (-\infty, 0]$.

结论　问题 (4.3.28) 至少有一个解.

证明　取 $h(t) = e^t$, $t \in (-\infty, 0]$. 则 $l = \int_{-\infty}^{0} e^t dt = 1$ 并可定义 BM_h- 空间和 PC_l- 空间. 容易看出 $p(t) = 1 + t^i$ 和

$$f(t, \psi) = \phi(t) \left(\ln \left(2 + \int_{-\infty}^{0} e^s |\psi(s)| ds \right) + \psi^{\frac{1}{3}}(0) + \psi^{\frac{1}{5}}(-1) \right),$$

$$I_1(\psi) = \ln \left(1 + \int_{-\infty}^{0} e^{2s} |\psi(s)| ds \right), \qquad (t, \psi) \in (0, +\infty) \times BM_h.$$

当 $y \in PC_l$ 为

$$\begin{cases} (Lx)(t) + \overline{\lambda} f(t, x_t) = 0, & t \neq 1, \\ \Delta x\big|_{t=1} = \overline{\lambda} I_1(x_1), \\ x(0) = 0, \lim\limits_{t \to +\infty} (1 + t^i) x'(t) = 0, \\ x(t) = \Phi(t), t \in (-\infty, 0], \\ x(t) \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上有界} \end{cases} \tag{4.3.29}$$

的解 ($\bar{\lambda} \in (0, 1)$), 则有

$$\begin{aligned} &|y(t)| \\ \leqslant & \int_0^{+\infty} G(t, s) \phi(s) \left(\ln \left(2 + \int_{-\infty}^{0} e^s |y_s(r)| dr \right) + y^{\frac{1}{3}}(s) + y^{\frac{1}{5}}(s - 1) \right) ds + \sum_{0 < 1 < t} I_1(y_1) \\ \leqslant & \int_0^{+\infty} G(t, s) \phi(s) ds (\ln(2 + \|\Phi\|_h + 3\|y\|_l) + \|y\|_h^{\frac{1}{3}} \\ & + e^{\frac{1}{5}} \|y\|_h^{\frac{1}{5}}) + \ln(1 + \|\Phi\|_h + 3\|y\|_l), \qquad t \in [0, +\infty), \end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned} &\|y\|_l \\ \leqslant & \sup_{t \in [0, +\infty)} \int_0^{+\infty} G(t, s) \phi(s) ds (\ln(2 + \|\Phi\|_h + 3\|y\|_l) + \|y\|_h^{\frac{1}{3}} + e^{\frac{1}{5}} \|y\|_h^{\frac{1}{5}}) \\ & + \ln(1 + \|\Phi\|_h + 3\|y\|_l). \end{aligned}$$

因此存在 $c > 0$, 满足 $\|y\|_l < c$ 对 (4.3.28) 的一切解 y 成立. 由定理 4.3.3 即知结论成立. □

例 4.3.2 考虑下述问题

$$\begin{cases} x''(t)+\dfrac{2t}{1+t^2}x'(t)+\phi(t)\left(\ln\left(2+\displaystyle\int_{-\infty}^{0}e^s|x_t(s)|ds\right)+x(t)+x(t-1)\right)=0, \\ t\in(0,1)\cup(1,+\infty), \\ \Delta x\big|_{t=1}=\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\displaystyle\int_{-\infty}^{0}e^{2s}|x_1(s)|ds\right), \\ x(0)=0,\ \lim\limits_{t\to+\infty}(1+t^i)x'(t)=0, \end{cases} \tag{4.3.30}$$

其中

$$\phi(t)=\frac{1}{4\pi^2(2+e)^2(1+t^i)^2},\qquad t\in[0,+\infty),$$

$$\Phi(t)=t\cdot\operatorname{sgn}(\cos t),\qquad t\in(-\infty,0].$$

结论 问题 (4.3.29) 有唯一解属于 $PC_l([0,+\infty),R)$.

证明 取 $h(t)=e^t$, $t\in(-\infty,0]$, 则 $l=\displaystyle\int_{-\infty}^{0}e^t dt=1$ 并可定义 BM_h- 空间和 PC_l- 空间. 容易看出 $p(t)=1+t^2$ 和

$$f(t,\psi)=\phi(t)\left(\ln\left(2+\int_{-\infty}^{0}e^s|\psi(s)|ds\right)+\psi(0)+\psi(-1)\right),$$

$$I_1(\psi)=\frac{1}{2}\ln\left(1+\int_{-\infty}^{0}e^{2s}|\psi(s)|ds\right),\qquad (t,\psi)\in(0,+\infty)\times BM_h,$$

且

$$|f(t,\psi_1)-f(t,\psi_2)|\leqslant\phi(t)(2+e)\|\psi_1-\psi_2\|_h),$$

$$|I_1(\psi_1)-I_1(\psi_2)|\leqslant\frac{1}{2}(\|\psi_1-\psi_2\|_h),$$

则

$$k=\sup_{t\in([0,+\infty)}\left[\int_{0}^{+\infty}G(t,s)\phi(s)ds\right]+\frac{1}{2}<1.$$

故定理 4.3.5 的条件满足. 因此问题 (4.3.29) 有唯一解属于 $PC_l([0,+\infty),R)$. □

例 4.3.3 考虑下述问题:

$$\begin{cases} x''(t)+\dfrac{2t}{1+t^2}x'(t)+\phi(t)\left(\ln\left(2+\displaystyle\int_{-\infty}^{0}e^s|x_t(s)|ds\right)+x^3(t)+x^{\frac{1}{5}}(t-1)\right)=0, \\ t\in(0,1)\cup(1,+\infty), \\ \Delta x\big|_{t=1}=\dfrac{1}{8}x(1), \\ x(0)=0,\ \lim\limits_{t\to+\infty}(1+t^2)x'(t)=0, \end{cases} \tag{4.3.31}$$

其中

$$\phi(t)=\frac{1}{4\pi^2(\ln 6+64+4^{\frac{1}{5}}e^{\frac{1}{5}})(1+t^2)^2},\quad \varPhi(t)=|\sin t|,\qquad t\in(-\infty,0].$$

结论　问题 (4.3.30) 至少有两个非负解.

证明　取 $h(t)=e^t$, $t\in(-\infty,0]$, 则 $l=\int_{-\infty}^0 e^t dt=1$ 并可定义 BM_h- 空间和 PC_l- 空间. Q 如 (4.3.10) 后所定义. 容易看出 $p(t)=1+t^2$ 和

$$f(t,\psi)=\phi(t)\left(\ln\left(2+\int_{-\infty}^0 e^s|\psi(s)|ds\right)+\psi^3(0)+\psi^{\frac{1}{5}}(-1)\right),\qquad I_1(\psi)=\frac{1}{8}\psi(0),$$

并对任意 $(t,\psi)\in[0,+\infty)\times Q_h$ 有

$$\phi(t)\psi^3(0)\leqslant f(t,\psi)\leqslant\phi(t)(\ln(2+\|\psi\|_h)+\|\psi\|_h^3+e^{\frac{1}{5}}\|\psi\|_h^{\frac{1}{5}}),\qquad |I_1(\psi)|\leqslant\frac{1}{8}\|\psi\|_h,$$

则 $f_1(x)=\ln(2+x)+x^3+e^{\frac{1}{5}}x^{\frac{1}{5}}$, $q(t)=\phi(t)$, $f_2(x)=x^3$, $\overline{q}(t)=\phi(t)$. 由此可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_2(x)}{x}=+\infty,$$

$$\sup_{c\in(0,+\infty)}\frac{c}{q_0f_1(\|\varPhi\|_h+3c)+P_1(\|\varPhi\|_h+3c)}\geqslant\frac{1}{q_0f_1(4)+P_1(4)}>1,$$

其中 $q_0=\sup\limits_{t\in[0,+\infty)}\int_0^{+\infty}G(t,s)\phi(s)ds\leqslant\frac{1}{4}$. 这样定理 4.3.6 的条件满足. 故问题 (4.3.30) 至少有两个非负解.　□

附　注

定理 4.1.1 和定理 4.1.2 选自 [34], 定理 4.2.1 选自 [23], 定理 4.2.2～ 定理 4.2.4 选自 [22], 定理 4.2.5 类似于 [25] 中的主要结果. 定理 4.3.3～ 定理 4.3.6 选自 [40].

和本章有关的内容还可参看本章后面所列的参考文献.

参 考 文 献

1 A Anokhin, L Berezansky, E Braverman. Exponential stability of linear delay impulsive differential equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, 193: 923～941

2 G Ballinger, Xinzhi Liu. Existence, uniqueness results for impulsive delay differential equations, Dynamics of Continuous,Discrete and Impulsive Systems. 1999, 5: 579～591

3 C Corduneanu. Integral Equations and Stability of Feedback Systems. New York: Academic Press. 1973

4 Y Dong. Perodic boundary value probloms for functinal differential equations with impulses. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1997, 210: 170～182

5 Xilin Fu, Baoqiang Yan. The global solutions of impulsive retarded functional differential equations. International Journal of Applied Mathematics, 2000, 2: 389~396
6 郭大钧. 非线性泛函分析. 济南: 山东科学技术出版社, 1985
7 郭大钧, 孙经先. 抽象空间常微分方程. 济南: 山东科学技术出版社, 1989
8 郭大钧. 非线性分析中的半序方法. 济南: 山东科学技术出版社, 2000
9 Dajun Guo, V Lakshmikansham, Xinzhi Liu. Nonlinear Integral Equations in Abstract Spaces. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996
10 Dajun Guo, V Lakshmikantham. Nonlinear Problems in Abstract Cones. New York: Acdemic Press., Inc. 1988
11 Dajun Guo, Xinzhi Liu. Multiple positive solutions of boundary value problems for impulsive differential equations. Nonlinear Analysis(TMA), 1995, 25: 327~337
12 Dajun Guo, Xinzhi Liu. Impulsive integro-differential equations on unbounded domain in a Banach space. Nonlinear Studies, 1996, 3: 49~57
13 J K Hale. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag. 1977
14 S K Kaul. Monotone iterative technique for impulsive diferential equations with variable times. Nonlinear World, 1995, 2: 341~345
15 S K Kaul. The periodic boundary value problem for impulsive diferential equations with variable times. Nonlinear Times and Digest, 1995, 2: 107~116
16 S V Krishna, A V Anokhin. Delay Differential Systems with Discontinuous Initial Data and Existence and Uniqueness Theorems for Systems with Impulses and Delay. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysys, 1994, 7: 49~67
17 G S Laddle, V Lakshmikantham, A S Vatala. Monotone iterative technique for nonlinear diferential equations. Pitman Advance Publishing Program, Bostone, 1985
18 V Lakshmikantham, D D Bainov, P S Simeonov. Theory of impulsive differential equations. World Scientific, Singapore, 1989
19 V Lakshmikantham, N S Papageorgiou, J V Devi. The method of upper and lower solutions and monotone technique for impulsive diferential equations with variable moments. Applicable Analysis, 1993, 51: 41~54
20 V Lakshmikantham, S Leela, S Kaul. Comparison principle for impulsive diferential equations with variable times and stability theory. Nonlinear Analysis, 1994, 22: 499~503
21 Xinzhi Liu. Some existence and nonexistence principles for a class of singular boundary value problems. Nonlinear Analysis(TMA), 1996, 27: 1147~1164
22 刘衍胜. Banach 空间一类奇异脉冲微分方程边值问题多个正解的存在性. 系统科学与数学, 2003, 23(2): 215~222
23 刘衍胜, 郭林. Banach 空间中一类带奇异性的脉冲微分方程边值问题的正解. 数学物理学报, 2002, 22: 391~398
24 Yansheng Liu. Positive solutions of second order singular initial value problem in Banach space. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2002, 33(6): 833~845
25 Yansheng Liu. Boundary value problems for second order differential equations on unbounded domains in a Banach space. Applied Mathematics and Computation, 2003, 135: 569~583
26 Yansheng Liu. Boundary value problems on half-line for functional differential equations with infinite delay in a Banach space. Nonlinear Analysis(TMA), 2003, 52: 1695~1708
27 Yansheng Liu. Existence and unboundedness of positive solutions for singular boundary value problems on half-line. Applied Mathematics and Computation, 2003, 144: 543~556
28 Yansheng Liu. Twin solutions to singular semipositone problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 286: 248~260
29 Yansheng Liu. Multiple positive solutions of singular boundary value problem for the one-dimensional p-Laplacian. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2002, 33: 1541~1555

30 Yansheng Liu. Multiple positive unbounded solutions for functional differential equations with infinite delay. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2004, 35: 207～224

31 Yansheng Liu. Structure of a class of singular boundary value problem with superlinear effect. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003, 284: 64～75

32 Yansheng Liu, Aiqin Qi. Positive solutions of nonlinear singular boundary value problem in abstract space. Computers and Mathematics with Applications, 2004, 47: 683～688

33 Yansheng Liu, Aiqin Qi. Positive solutions of initial value problems for singular integro-differential equations in Banach space. Demonstratio Mathematica, 2003, 36: 847～858

34 Yansheng Liu, Jiangang Qi. The periodic boundary value problem for impulsive differential equations with variable times. Ann. Diff. Eqs., 2001, 17: 52～59

35 Yansheng Liu, Xinzhi Liu. On global structure of a class of singular boundary value problem with sublinear effect. Nonlinear Functional Analysis and Applications, 2004, 9: 57～72

36 刘衍胜. Banach 空间中非线性奇异微分方程边值问题的正解. 数学学报, 2004, 47: 131～140

37 Yansheng Liu, Baoqiang Yan. Multiple Solutions of Singular Boundary Value Problems for Differential Systems. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 287(2): 543～559

38 K Wang, K Huang. C_h-Spaces and the boundedness of solutions for functional differential equations and periodic solutions. Acta Science of China, 1987, 3A: 242～253

39 L Wen, P Weng. Weakly exponentially asymptotic stability of functional differential equation with impulse, Dynamics of Continuous. Discrete and Impulsive Systems, 1999, 5: 251～271

40 Baoqiang Yan. Boundary value problems on the half-line with impulses and infinite delay. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 259: 94～114

41 Baoqiang Yan. Multiple unbounded solutions of boundary value problems for second order differential equations on the half line. Nonlinear Analysis, 2002, 51: 1031～1044

42 Baoqiang Yan, Yansheng Liu. Unbounded solution of the singular boundary value problem for second order differential equations on the half-line. Applied Mathematics and Computation, 2004, 147: 629～644

43 Baoqiang Yan, Xiyu Liu. Multiple solutions of impulsive boundary value problems on the half-line in Banach spaces. SUT Journal of Mathematics, 2000, 36(2): 167～183

第 5 章　脉冲偏微分系统的振动理论

脉冲偏微分系统作为一支新的数学分支已引起不少学者的兴趣与关注. 最新研究成果表明, 在物理、化学、生物、医学、人口动力学、最优控制等现代科技诸领域中许多实际问题的数学模型都可归结为脉冲偏微分系统. 因此对其研究具有重要理论意义和应用价值. 近年来关于脉冲偏微分系统的研究已有一些结果发表. 譬如文献 [1] 建立了脉冲抛物系统的比较原理并应用于单物种增长模型, 这是关于脉冲偏微分系统的最早文献. 文献 [2] 研究了脉冲双曲系统的周期边值问题, 文献 [3] 研究了脉冲抛物系统的渐近性, 文献 [4] 研究了脉冲双曲系统的振动性. 但总的来看, 关于脉冲偏微分系统的研究尚处于初始阶段, 还有大量待研究的崭新课题. 本章阐述脉冲偏微分系统的振动理论, 主要介绍作者近年的最新研究成果. 5.1 节考虑一类不含时滞的非线性脉冲抛物微分系统, 建立了在两类不同边界条件下的振动准则. 5.2 节研究了不含时滞的脉冲双曲系统边值问题解的振动性质. 5.3 节考虑既有时滞又有脉冲的抛物系统, 借助时滞脉冲微分不等式得到了在 Robin 边界条件下解振动的若干充分条件.

§5.1　脉冲抛物系统的振动准则

本节的目的旨在建立一类脉冲抛物系统在两类不同边界条件下的振动准则.

考虑如下脉冲抛物系统:

$$\begin{cases} u_t = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + c(t,x,u), \qquad t \neq t_k, \\ \Delta u = I(t,x,u), t = t_k, \qquad k = 1,2,3,\cdots, \end{cases} \tag{5.1.1}$$

其中 (i)$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$, 且 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = +\infty$,

(ii) $\Delta u|_{t=t_k} = u(t_k^+, x) - u(t_k^-, x)$,

(iii) 当 $(t,x) \in G = R^+ \times \Omega$ 时 , $u = u(t,x)$, 其中 Ω 是在 R^n 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $R_+ = [0,+\infty)$,

(iv) $a_i \in PC[R_+, R_+]$　$i = 1,2,\cdots,n$, 其中 PC 表示关于 t 是分段连续函数且满足当 $t = t_k, k = 1,2,\cdots$ 时仅具有第一类间断点且左连续; $c \in PC[R_+ \times R^n \times R, R]$,

(v) $I : R_+ \times \overline{\Omega} \times R \to R$.

我们将考虑两种边界条件:

$$u = \varphi(t,x), \qquad (t,x) \in R_+ \times \partial\Omega, \quad t \neq t_k, \tag{B$_1$}$$

与

$$\overrightarrow{\xi} \cdot \overrightarrow{\eta} + \mu(t,x)u = \psi(t,x), \qquad (t,x) \in R^+ \times \partial\Omega, \quad t \neq t_k, \tag{B$_2$}$$

其中 $\mu \in PC[R_+ \times \partial G, R_+]$, $\varphi, \psi \in PC[R_+ \times \partial\Omega, R]$, N 是 $\partial\Omega$ 外部的正规向量的可逆元素，且

$$\overrightarrow{\xi} = \{a_1(t), a_2(t), \cdots, a_n(t)\},$$

$$\overrightarrow{\eta} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(N, x_1), \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos(N, x_2), \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\cos(N, x_n)\right\}.$$

问题 (5.1.1),(B$_1$) 或 (5.1.1),(B$_2$) 的解 $u(t,x)$ 是当 $t = t_k, k = 1, 2, \cdots$ 时具有第一类间断点的分段连续函数. 按照约定，假设它们是左连续的，在脉冲时刻满足以下关系：

$$u(t_k^-, x) = u(t_k, x), \qquad u(t_k^+, x) = u(t_k, x) + I(t_k, x, u(t_k, x)).$$

定义 5.1.1　设 $u(t,x)$ 是问题 (5.1.1), (B$_1$) 或 (5.1.1), (B$_2$) 在区域 G 中的非零解. 如果存在一个数 $\tau \geqslant 0$ 使得当 $(t,x) \in [\tau, +\infty) \times \Omega$ 时 $u(t,x)$ 恒正或恒负，则称 $u(t,x)$ 为非振动的. 否则，$u(t,x)$ 称为振动的.

为得到振动的充分条件，需考虑如下问题：

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \lambda u = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1.2}$$

其中 λ 是一个常数，存在常数 a_0 使 $a_i(t) \geqslant a_0 > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 我们可以选一个自伴算子

$$L[u] = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},$$

此时 L 的 Rayleigh 商为

$$J(u) = \frac{\int_\Omega \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(t)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}, \qquad u \neq 0,\ u \in H = W_0^{1,2}(\Omega).$$

定义

$$\lambda_0 = \inf_H J(u),$$

因为 $a_i(t) \geqslant a_0 > 0$, 所以有

$$J(u) \geqslant \frac{\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx} \geqslant a_0\sigma_0 > 0,$$

其中 σ_0 是 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u + \sigma u = 0, & x \in \Omega, \sigma\text{是一常数}, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的最小特征值. 显然 σ_0 是正数. 因此

$$\lambda_0 \geqslant a_0\sigma_0 > 0.$$

然后通过 [4] 中相似的讨论可得到以下结果:

引理 5.1.1　若 $a_i(t) \geqslant a_0 > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 则问题 (5.1.2) 存在正的最小特征值 λ_0, 且相应的特征函数 $\Phi(x)$ 在 Ω 上取值为正.

引理 5.1.2　设 $a_i(t) \geqslant a_0 > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 且成立以下假定:

(A_1) $c(t, x, u) \leqslant -p(t, x)f(u)$, 其中 $p \in PC[R_+ \times \overline{\Omega}, R_+], f \in C(R, R)$ 且 $f(u)$ 在 R_+ 上为正的凸函数.

(A_2) 对任意函数 $u \in PC[R_+ \times \overline{\Omega}, R_+]$, 存在常数 α_k 使

$$\int_\Omega I(t_k, x, u(t_k, x))dx \leqslant \alpha_k \int_\Omega u(t_k, x)dx, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

若 $u(t, x)$ 是问题 (5.1.1),(B_1) 在区域 $[\tau, +\infty) \times \Omega$ 上的一正解, 则脉冲微分不等式

$$\begin{cases} U'(t) + \lambda_0 U(t) + P(t)f(U(t)) \leqslant Q(t), & t \neq t_k, \\ U(t_k^+) \leqslant (1 + \alpha_k)U(t_k), & k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{5.1.3}$$

存在最终正解

$$U(t) = \frac{1}{\int_\Omega \Phi(x)dx}\int_\Omega u(t, x)\Phi(x)dx, \tag{5.1.4}$$

其中 $P(t) = \min\limits_{x \in \overline{\Omega}}\{p(t, x)\}$ 及

$$Q(t) = \left[\int_\Omega \Phi(x)dx\right]^{-1}\left[-\int_{\partial\Omega} \varphi(t, x)\overrightarrow{\xi} \cdot \overrightarrow{\beta} dS\right], \qquad t \neq t_k,$$

dS 为 $\partial\Omega$ 的面积元且

$$\overrightarrow{\beta} = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\cos(N, x_1), \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\cos(N, x_2), \cdots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\cos(N, x_n), \right\}.$$

证明　设 $u(t,x)$ 是问题 (5.1.1), (B_1) 在区域 $[\tau,\infty)\times\Omega$ 上的一个解，其中 $\tau\geqslant 0$, 当 $t\neq t_k$ 时， (5.1.1) 两边同时乘以特征函数 $\Phi(x)$ 并在区域 Ω 上关于 x 积分，得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)\Phi(x)dx &= \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Phi(x)dx \\ &\quad + \int_\Omega c(t,x,u(t,x))\Phi(x)dx, \qquad t\neq t_k,\ t\geqslant\tau. \quad (5.1.5)\end{aligned}$$

由 (A_1) 及 Jason 不等式可得

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega c(t,x,u(t,x))\Phi(x)dx \geqslant \int_\Omega p(t,x)f(u(t,x))\Phi(x)dx \\ &\geqslant p(t)\int_\Omega \Phi(x)dx f\left(\frac{1}{\int_\Omega \Phi(x)dx}\int_\Omega u\Phi dx\right), \qquad t\neq t_k,\ t\geqslant\tau. \qquad (5.1.6)\end{aligned}$$

运用 Gauss 散度定理及引理 5.1.1, 可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Phi(x)dx = \int_\Omega\left[\Phi\sum_{i=1}^n a_i(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n a_i(t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right]dx \\ &-\int_\Omega\left[u\sum_{i=1}^n a_i(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n a_i(t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right]dx + \int_\Omega u\sum_{i=1}^n a_i(t)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}dx \\ &= \int_{\partial\Omega}\Phi\sum_{i=1}^n a_i(t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(N,x_i)dS - \int_{\partial\Omega}u\sum_{i=1}^n a_i(t)\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\cos(N,x_i)dS \\ &\quad + \int_\Omega u\sum_{i=1}^n a_i(t)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}dx \\ &= \int_{\partial\Omega}\Phi\overrightarrow{\xi}\,\overrightarrow{\eta}dS - \int_{\partial\Omega}u\overrightarrow{\xi}\,\overrightarrow{\beta}dS - \lambda_0\int_\Omega u\Phi dx \\ &= -\int_{\partial\Omega}\Phi(t,x)\overrightarrow{\xi}\,\overrightarrow{\beta}dS - \lambda_0\int_\Omega u\Phi dx, \qquad t\neq t_k, t\geqslant\tau. \qquad (5.1.7)\end{aligned}$$

联系 (5.1.5), (5.1.6), (5.1.7) 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{\Omega}u(t,x)\Phi(x)dx+\lambda_0\int_{\Omega}u(t,x)\Phi(x)dx\\&+\int_{\Omega}\Phi(x)dx\cdot P(t)\cdot f\left(\frac{1}{\int_{\Omega}\Phi(x)dx}\int_{\Omega}u(t,x)\Phi(x)dx\right)\\\leqslant&-\int_{\partial\Omega}\varphi(t,x)\overrightarrow{\xi}\,\overrightarrow{\beta}dS,\qquad t\neq t_k,t\geqslant\tau.\end{aligned}\tag{5.1.8}$$

当 $t=t_k$ 时, 由 (A_2) 得

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}[u(t_k^+,x)-u(t_k,x)]\Phi(x)dx=\int_{\Omega}I(t_k,x,u(t_k,x))\Phi(x)dx\\\leqslant&\alpha_k\int_{\Omega}u(t_k,x)\Phi(x)dx,\qquad k=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

即

$$\int_{\Omega}u(t_k^+,x)\Phi(x)dx\leqslant(1+\alpha_k)\int_{\Omega}u(t_k,x)\Phi(x)dx,\qquad k=1,2,\cdots.\tag{5.1.9}$$

因此 (5.1.8), (5.1.9) 意味着当 $t\geqslant\tau$ 时由 (5.1.4) 定义的函数 $U(t)$ 是脉冲微分不等式 (5.1.3) 的正解. □

定理 5.1.1 假设条件 (A_1), (A_2) 均成立, $a_i(t)\geqslant a_0>0,i=1,2,\cdots,n$. 若进一步假设

$$\begin{aligned}&(\mathrm{A}_3)f(-u)=-f(u),\qquad u\in(0,+\infty),\\&I(t_k,x,-u(t_k,x))=-I(t_k,x,u(t_k,x)),\qquad k=1,2,\cdots,\\&c(t,x,-u)=-c(t,x,u),\qquad (t,x,u)\in R_+\times R^n\times R,\end{aligned}$$

且脉冲微分不等式 (5.1.3) 与脉冲微分不等式

$$\begin{cases}U'(t)+\lambda_0U(t)+P(t)f(U(t))\leqslant-Q(t),\qquad t\neq t_k,\\U(t_k^+)\leqslant(1+\alpha_k)U(t_k),\qquad k=1,2,\cdots\end{cases}\tag{5.1.10}$$

无最终正解, 则问题 (5.1.1), (B_1) 在区域 G 上的每个非零解是振动的.

证明 若结论不成立, 设 $u(t,x)$ 是问题 (5.1.1), (B_1) 的一非零解, 则它在区域 $[\tau,+\infty)\times\Omega$ 上恒正或恒负, 其中 $\tau\geqslant0$. 不妨设当 $(t,x)\in[\tau,+\infty)\times\Omega$ 时 $u(t,x)>0$. 由引理 5.1.2 知 (5.1.4) 定义的函数 $U(t)$ 是不等式 (5.1.3) 的最终正解, 与定理条件矛盾.

若当 $(t,x)\in[\tau,+\infty)\times\Omega$ 时 $u(t,x)<0$, 则函数 $\widetilde{u}(t,x)=-u(t,x),(t,x)\in[\tau,+\infty)\times\Omega$ 是以下脉冲抛物边值问题

$$\begin{cases} u_t=\sum_{i=1}^{n}a_i(t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+c(t,x,u), & t\neq t_k,\quad (t,x)\in G,\\ u=-\varphi(t,x), \quad t\neq t_k, & (t,x)\in R_+\times\partial\Omega,\\ \Delta u=I(t,x,u), \quad t=t_k, & k=1,2,\cdots \end{cases}$$

的一个正解, 并且满足

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_\Omega \widetilde{u}(t,x)\Phi(x)dx+\lambda_0\int_\Omega \widetilde{u}(t,x)\Phi(x)dx\\ &+\int_\Omega \Phi(x)dx\cdot P(t)\cdot f\left(\frac{1}{\int_\Omega\Phi(x)dx}\int_\Omega \widetilde{u}(t,x)\Phi(x)dx\right)\\ \leqslant& -\int_{\partial\Omega}[-\varphi(t,x)]\overrightarrow{\xi}\,\overrightarrow{\beta}dS, \qquad t\neq t_k,\quad t\geqslant\tau,\\ &\int_\Omega \widetilde{u}(t_k^+,x)\Phi(x)dx\leqslant(1+\alpha_k)\int_\Omega\widetilde{u}(t_k,x)\Phi(x)dx, \qquad k=1,2,\cdots. \end{aligned}$$

所以函数

$$\widetilde{U}(t)=\frac{1}{\int_\Omega\Phi(x)dx}\int_\Omega\widetilde{u}(t,x)\Phi(x)dx)$$

是不等式 (5.1.10) 当 $t\geqslant\tau$ 时的一个正解, 亦与定理条件矛盾. □

在定理 5.1.1 中令 $\varphi\equiv 0$, 则可得到以下结论.

定理 5.1.2　设条件 (A_1), (A_2), (A_3) 均成立, $a_i(t)\geqslant a_0>0, i=1,2,\cdots,n$. 若脉冲微分不等式

$$\begin{cases} U'(t)+\lambda_0 U(t)+P(t)f(U(t))\leqslant 0, & t\neq t_k,\\ U(t_k^+)\leqslant(1+\alpha_k)U(t_k), & k=1,2,\cdots \end{cases}\tag{5.1.11}$$

无最终正解, 则系统 (5.1.1) 满足边界条件

$$u=0,\qquad (t,x)\in R_+\times\partial\Omega,\quad t\neq t_k \tag{B_1^*}$$

的非零解在区域 G 上是振动的.

定理 5.1.3　设条件 (A_1), (A_2), (A_3) 均成立. 若脉冲微分不等式

$$\begin{cases} V'(t)+P(t)f(V(t))\leqslant\dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_{\partial\Omega}\psi(t,x)dS, & t\neq t_k,\\ V(t_k^+)\leqslant(1+\alpha_k)V(t_k), & k=1,2,\cdots \end{cases}\tag{5.1.12}$$

与脉冲微分不等式

$$\begin{cases} V'(t)+P(t)f(V(t))\leqslant -\dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_{\partial\Omega}\psi(t,x)dS, & t\neq t_k, \\ V(t_k^+)\leqslant(1+\alpha_k)V(t_k), & k=1,2,\cdots \end{cases} \tag{5.1.13}$$

均无最终正解，则问题 (5.1.1), (B_2) 的非零解在区域 G 上是振动的，其中

$$|\Omega|=\int_\Omega dx.$$

证明 设 $u(t,x)$ 是问题 (5.1.1), (B_2) 的一非零解且在区域 $[\tau,+\infty)\times\Omega$ 上恒正或恒负，其中 $\tau\geqslant 0$. 不妨设当 $(t,x)\in[\tau,+\infty)\times\Omega$ 时 $u(t,x)>0$.

当 $t\neq t_k$ 时，将 (5.1.1) 在区域 Ω 上关于 x 积分，得

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)dx=\int_\Omega\sum_{i=1}^n a_i(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}dx+\int_\Omega c(t,x,u(t,x))dx, \qquad t\neq t_k, \quad t\geqslant\tau. \tag{5.1.14}$$

由 (A_1) 与 Jensen 不等式可得

$$\begin{aligned} -\int_\Omega c(t,x,u(t,x))dx &\geqslant \int_\Omega p(t,x)f(u(t,x))dx \\ &\geqslant P(t)\cdot|\Omega|\cdot f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(t,x)dx\right), \qquad t\neq t_k, t\geqslant\tau. \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

运用 Gauss 散度定理可得

$$\begin{aligned} &\int_\Omega\sum_{i=1}^n a_i(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}dx=\int_\Omega\overrightarrow{\xi}\,\overrightarrow{\eta}dS=\int_{\partial\Omega}[\psi(t,x)-\mu(t,x)u]dS \\ \leqslant &\int_{\partial\Omega}\psi(t,x)dS, \qquad t\neq t_k, \quad t\geqslant\tau. \end{aligned} \tag{5.1.16}$$

联系 (5.1.14)~(5.1.16) 得

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)dx+|\Omega|\cdot P(t)\cdot f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(t,x)dx\right) \\ \leqslant &\int_{\partial\Omega}\psi(t,x)dS, \qquad t\neq t_k, \quad t\geqslant\tau. \end{aligned} \tag{5.1.17}$$

当 $t=t_k$ 时，由 (A_2) 得

$$\begin{aligned} \int_\Omega[u(t_k^+,x)-u(t_k,x)]dx &= \int_\Omega I(t_k,x,u(t_k,x))dx \\ &\leqslant \alpha_k\int_\Omega u(t_k,x)dx, \qquad k=1,2,\cdots, \end{aligned}$$

即

$$\int_\Omega u(t_k^+,x)dx \leqslant (1+\alpha_k)\int_\Omega u(t_k,x)dx, \qquad k=1,2,\cdots. \tag{5.1.18}$$

所以 (5.1.17),(5.1.18) 说明函数

$$V(t)=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(t,x)dx \tag{5.1.19}$$

是脉冲微分不等式 (5.1.12) 当 $t\geqslant\tau$ 时的一个正解，与定理条件矛盾.

若当 $(t,x)\in[\tau,+\infty)\times\Omega$ 时 $u(t,x)<0$, 则令

$$\widetilde{u}(t,x)=-u(t,x), \qquad (t,x)\in[\tau,+\infty)\times\Omega.$$

易知 $\widetilde{u}(t,x)$ 是以下问题

$$\begin{cases} u_t=\sum\limits_{i=1}^n a_i(t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+c(t,x,u), & t\neq t_k, \quad (t,x)\in G,\\ \overrightarrow{\xi}\,\overrightarrow{\eta}+\mu(t,x)u=-\psi(t,x), & t\neq t_k, \quad (t,x)\in R^+\times\partial\Omega,\\ \Delta u=I(t,x,u), \quad t=t_k, & k=1,2,\cdots \end{cases}$$

的一个正解且满足

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_\Omega \widetilde{u}(t,x)dx+|\Omega|\cdot P(t)\cdot f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \widetilde{u}(t,x)dx\right)\\ \leqslant &\int_{\partial\Omega}[-\psi(t,x)]dS, \qquad t\neq t_k, t\geqslant\tau,\\ &\int_\Omega \widetilde{u}(t_k^+,x)dx\leqslant(1+\alpha_k)\int_\Omega \widetilde{u}(t_k,x)dx, \qquad k=1,2,\cdots. \end{aligned}$$

所以函数

$$\widetilde{V}(t)=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \widetilde{u}(t,x)dx$$

是脉冲微分不等式 (5.1.13) 当 $t\geqslant\tau$ 时的一个正解．亦推出矛盾. □

定理 5.1.4　设条件 (A_1), (A_2), (A_3) 均成立，若脉冲微分不等式

$$\begin{cases} V'(t)+P(t)+f(V(t))\leqslant 0, & t\neq t_k,\\ V(t_k^+)\leqslant(1+\alpha_k)V(t_k), & k=1,2,\cdots \end{cases}$$

无最终正解，则 (5.1.1) 满足边值条件

$$\overrightarrow{\xi}\cdot\overrightarrow{\eta}+\mu(t,x)u=0, \qquad (t,x)\in R_+\times\partial\Omega, t\neq t_k \tag{B_2^*}$$

的非零解在区域 G 上是振动的.

令 $\psi(t,x)=0$, 由定理 5.1.3 可得定理 5.1.4.

由前面的讨论可知对于满足某些边界条件的脉冲抛物系统 (5.1.1), 建立其振动条件的问题可以归结为研究一阶脉冲微分不等式的解的性质. 据此我们进一步得到脉冲抛物系统的若干振动准则. 这里将用到以下引理:

引理 5.1.3(见 [10]) 设

$$m'(t)\leqslant g(t)m(t)+h(t),\qquad t\neq t_k, t\geqslant t_0,$$

$$m(t_k^+)\leqslant d_k m(t_k)+b_k,\qquad k=1,2,\cdots,$$

其中 $0\leqslant t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots$, 且 $\lim\limits_{k\to\infty}t_k=+\infty; m\in PC^1[R_+,R], g,h\in PC[R_+,R]; d_k\geqslant 0, b_k$ 为常数, 则

$$\begin{aligned}m(t)\leqslant{}& m(t_0)\prod_{t_0<t_k<t}d_k\exp\left(\int_{t_0}^t g(s)ds\right)+\sum_{t_0<t_k<t}\prod_{t_k<t_j<t}d_j\exp\left(\int_{t_k}^t g(s)ds\right)b_k\\&+\int_{t_0}^t\prod_{s<t_k<t}d_k\exp\left(\int_s^t g(\sigma)d\sigma\right)h(s)ds,\qquad t\geqslant t_o.\end{aligned}$$

定理 5.1.5 设条件 $(A_1)\sim(A_3)$ 均成立, $a_i(t)\geqslant a_0(t)>0, i=1,2,\cdots$, 若进一步假设

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k<+\infty, \tag{5.1.20}$$

$$\liminf_{t\to+\infty}\int_\tau^t\prod_{s<t_k<t}(1+\alpha_k)Q(s)ds=-\infty, \tag{5.1.21}$$

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_\tau^t\prod_{s<t_k<t}(1+\alpha_k)Q(s)ds=+\infty, \tag{5.1.22}$$

对任一充分大的 τ 均成立, 则问题 (5.1.1), (B_1) 的任意非零解在区域上是振动的.

证明 设 $u(t,x)$ 是问题 (5.1.1), (B_1) 的一个非零解, 且在区域 $[\tau,+\infty)\times\Omega$ 上恒正或恒负, 其中 $\tau\geqslant 0$. 若 $u(t,x)>0$, 当 $(t,x)\in[\tau,+\infty)\times\Omega$ 时, 由引理 5.1.2 知 (5.1.4) 定义的函数 $U(t)$ 是不等式 (5.1.3) 当 $t\geqslant\tau$ 时的一个正解. 因为当 $u(t)>0$ 时 $f(u(t))>0$, 所以有

$$u'(t)\leqslant Q(t),\qquad t\neq t_k, t\geqslant\tau. \tag{5.1.23}$$

考虑 (5.1.23) 与不等式 $u(t_k^+)\leqslant(1+\alpha_k)u(t_k), k=1,2,\cdots$, 由引理 5.1.3 可得

$$u(t)\leqslant u(\tau)\prod_{\tau<t_k<t}(1+\alpha_k)+\int_\tau^t\prod_{s<t_k<t}(1+\alpha_k)Q(s)ds, t\geqslant\tau.$$

由于 (5.1.20), (5.1.21) 及当 $t \geqslant \tau$ 时 $u(t) > 0$ 可推出矛盾.

若 $u(t,x) < 0$, $(t,x) \in [\tau, +\infty) \times \Omega$, 根据定理 5.1.1 中相似的证明易知函数

$$u(t) = \frac{1}{\int_\Omega \Phi(x)dx} \int_\Omega [-u(t,x)]\Phi(x)dx$$

是脉冲微分不等式 (5.1.10) 当 $t \geqslant \tau$ 时的一个正解. 由 (5.1.22) 得

$$\liminf_{t\to+\infty} \int_\tau^t \prod_{s<t_k<t} (1+\alpha_k)(-Q(s))ds = -\limsup_{t\to+\infty} \int_\tau^t \prod_{s<t_k<t} (1+\alpha_k)Q(s)ds = -\infty,$$

于是同样可推得矛盾. □

定理 5.1.6　设条件 (A_1) ~(A_3) 及 (5.1.20) 均成立, $a_i(t) \geqslant a_0 > 0, i = 1, 2, \cdots, n$. 若进一步假设

$$\frac{f(u)}{u} \geqslant A, \qquad u \in (0, +\infty), A\text{为一常数且}A > 0, \tag{5.1.24}$$

$$\int^{+\infty} P(s)ds = +\infty, \tag{5.1.25}$$

$$\liminf_{t\to+\infty} \int_\tau^t \prod_{s<t_k<t} (1+\alpha_k)\exp\left(-A\int_s^t P(\sigma)d\sigma\right) Q(s)ds = -\infty, \tag{5.1.26}$$

$$\limsup_{t\to+\infty} \int_\tau^t \prod_{s<t_k<t} (1+\alpha_k)\exp\left(-A\int_s^t P(\sigma)d\sigma\right) Q(s)ds = +\infty, \tag{5.1.27}$$

对任一充分大的数 τ 均成立, 则问题 (5.1.1), (B_1) 的任意非零解在区域 G 上是振动的.

证明　设 $u(t,x)$ 是问题 (5.1.1), (B_1) 的一个非零解, 且在区域 $[\tau, +\infty) \times \Omega$ 上恒正或恒负, 其中 $\tau \geqslant 0$. 若 $u(t,x) > 0$, $(t,x) \in [\tau, +\infty) \times \Omega$, 由引理 5.1.2 知 (5.1.4) 定义的函数是不等式 (5.1.3) 当 $t \geqslant \tau$ 时的一个正解. 又由 (5.1.24) 得

$$u'(t) \leqslant -AP(t)u(t) + Q(t), \qquad t \neq t_k, t \geqslant \tau. \tag{5.1.28}$$

考虑 (5.1.28) 及不等式

$$u(t_k^+) \leqslant (1+\alpha_k)u(t_k), \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

由引理 5.1.3 可得

$$\begin{aligned} u(t) \leqslant{}& u(\tau) \prod_{\tau<t_k<t} (1+\alpha_k)\exp\left(-A\int_\tau^t P(s)ds\right) \\ &+ \int_\tau^t \prod_{s<t_k<t} (1+\alpha_k)\exp\left(-A\int_s^t P(\sigma)d\sigma\right) Q(s)ds, \qquad t \geqslant \tau. \end{aligned}$$

由于 (5.1.20), (5.1.25), (5.1.26) 及当 $t \geqslant \tau$ 时 $u(t) > 0$ 可推出矛盾.

当 $u(t,x) < 0, (t,x) \in (\tau, +\infty) \times \Omega$ 时，函数

$$\widetilde{u}(t) = \frac{1}{\int_\Omega \Phi(x)dx} \int_\Omega [-u(t,x)]\Phi(x)dx$$

是脉冲微分不等式 (5.1.1) 当 $t \geqslant \tau$ 时的一个正解.

$$\begin{aligned} &\liminf_{t\to+\infty} \int_\tau^t \prod_{s<t_k<t} (1+\alpha_k)\exp\left(-A\int_s^t P(\sigma)d\sigma\right)[-Q(s)]ds \\ &= -\limsup_{t\to+\infty} \int_\tau^t \prod_{s<t_k<t} (1+\alpha_k)\exp\left(-A\int_s^t P(\sigma)d\sigma\right)Q(s)ds = -\infty, \end{aligned}$$

亦推出矛盾. □

类似定理 5.1.5 证明中的讨论可得下述结论.

定理 5.1.7 设条件 $(\mathrm{A}_1) \sim (\mathrm{A}_3)$ 及 (5.1.20) 均成立，若

$$\liminf_{t\to+\infty} \int_\tau^t \prod_{s<t_k<t} (1+\alpha_k)\left[\int_{\partial\Omega} \psi(s,x)dS\right]ds = -\infty,$$

$$\limsup_{t\to+\infty} \int_\tau^t \prod_{s<t_k<t} (1+\alpha_k)\left[\int_{\partial\Omega} \psi(s,x)dS\right]ds = +\infty$$

对任一充分大的数 τ 均成立，则问题 (5.1.1), (B_2) 的任意非零解在区域上是振动的.

定理 5.1.8 设 (5.1.20), (5.1.24), (5.1.25) 及 $(\mathrm{A}_1) \sim (\mathrm{A}_3)$ 均成立，若

$$\liminf_{t\to+\infty} \int_\tau^t \prod_{s<t_k<t} (1+\alpha_k)\exp\left(-A\int_s^t P(\sigma)d\sigma\right)\left[\int_{\partial\Omega} \psi(s,x)dS\right]ds = -\infty,$$

$$\limsup_{t\to+\infty} \int_\tau^t \prod_{s<t_k<t} (1+\alpha_k)\exp\left(-A\int_s^t P(\sigma)d\sigma\right)\left[\int_{\partial\Omega} \psi(s,x)dS\right]ds = +\infty$$

对任一充分大的数 τ 均成立，则问题 (5.1.1), (B_2) 的任意非零解在区域上是振动的.

定理 5.1.9 设 (5.1.20), (5.1.24), (5.1.25) 及 $(\mathrm{A}_1) \sim (\mathrm{A}_3)$ 均成立，$a_i(t) \geqslant a_0 > 0, i = 1, 2, \cdots$, 则问题 (5.1.1), (B_1^*) 的任一非零解 $u(t,x)$ 或者在区域 G 上振动，或者满足

$$\lim_{t\to\infty} \int_\Omega u(t,x)\Phi(x)dx = 0.$$

证明　设 $u(t,x)$ 是问题 (5.1.1), (B_1^*) 的一个非振动解, 且 $\lim\limits_{t\to\infty}\int_\Omega u(t,x)\Phi(x)dx \neq 0$. 不妨设 $u(t,x)>0$, 当 $(t,x)\in\Omega\times[\tau,+\infty)$ 时, 易知 (5.1.4) 定义的函数 $U(t)$ 是不等式 (5.1.11) 当 $(t,x)\in\Omega\times[\tau,+\infty)$ 且

$$\lim_{t\to+\infty}u(t)\neq 0 \tag{5.1.29}$$

时的一个最终正解. 根据 (5.1.24) 可得

$$u'(t)\leqslant -AP(t)u(t),\qquad t\neq t_k, t\geqslant\tau. \tag{5.1.30}$$

考虑 (5.1.30) 及不等式 $u(t_k^+)\leqslant(1+\alpha_k)u(t_k), k=1,2,\cdots$, 由引理 5.1.3 得

$$u(t)\leqslant u(\tau)\prod_{\tau<t_k<t}(1+\alpha_k)\exp\left(-A\int_\tau^t P(s)ds\right),\qquad t\geqslant\tau.$$

由 (5.1.20), (5.1.25) 知 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)=0$ 与 (5.1.29) 矛盾. 若 $u(t,x)<0$, 当 $(t,x)\in\Omega\times[\tau,+\infty)$ 时, $\tilde{u}(t,x)\equiv -u(t,x)$ 是问题 (5.1.1), (B_1^*) 的一个正解, 亦推出矛盾. □

定理 5.1.10　设 (5.1.20), (5.1.24), (5.1.25) 及 (A_1) ~(A_3) 均成立, 则问题 (5.1.1), (B_2^*) 的任一非零解 $u(t,x)$ 或者在区域 G 上振动, 或者满足

$$\lim_{t\to\infty}\int_\Omega u(t,x)dx=0.$$

类似定理 5.1.9 的证明可得定理 5.1.10. □

例 5.1.1　考虑非线性脉冲抛物边值问题

$$\begin{cases} u_t=a(t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-3t^2e^{\sin x}u(1+u^2), & t\neq k\pi, (t,x)\in R_+\times(0,\pi),\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, & t\neq k\pi, t\geqslant 0,\\ \Delta u=\dfrac{u}{\sqrt{t^3}}\cos\dfrac{x}{5}, & t=k\pi, \end{cases} \tag{5.1.31}$$

其中

$$a(t)=\begin{cases} a_0, & t=0,\\ a_0+\dfrac{1}{1-\cos 4t}, & t>0, t\neq k\pi, k=1,2,\cdots, \end{cases}$$

a_0 为一常数. 此处 $n=1, \Omega=(0,\pi), P(t,x)=3t^2e^{\sin x}, P(t)=\min\limits_{x\in[0,\pi]}P(t,x)=3t^2, f(u)=u(1+u^2)$. 易知函数 $c(t,x,u)=-P(t,x)f(u)$ 满足条件 (A_1). 令 $I(t,x,u)=$

$\frac{u}{\sqrt{t^3}}\cos\frac{x}{5}$, 又

$$\int_0^{\pi} I(k\pi, x, u(k\pi, x))dx = \int_0^{\pi} \frac{u(k\pi, x)}{\sqrt{(k\pi)^3}}\cos\frac{x}{5}dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{(k\pi)^3}}\int_0^{\pi} u(k\pi, x)dx,$$

$$\int_0^{+\infty} P(s)ds = \int_0^{+\infty} 3s^2 ds = +\infty$$

及

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(k\pi)^3}} < +\infty.$$

易见定理 5.1.9 的全部条件满足, 因此问题 (5.1.31) 的任一非零解 $u(t,x)$ 或者在区域 $R_+ \times (0,\pi)$ 上振动, 或者满足

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^{\pi} u(t,x)\Phi(x)dx = 0.$$

§5.2 脉冲双曲系统的振动准则

本节的目的是研究脉冲双曲方程解的振动性质. 我们借助了某类二节脉冲微分不等式, 得到了非线性脉冲双曲方程在二类不同边界条件下解振动的判别准则.

考虑如下非线性脉冲双曲方程:

$$\begin{cases} u_{tt} + f(t,x)g(u) = a(t)\Delta u, & t \neq t_k, \\ u(t_k^+, x) - u(t_k^-, x) = p(t_k, x, u), & k = 1, 2, 3, \cdots, \\ u_t(t_k^+, x) - u_t(t_k^-, x) = q(t_k, x, u), & k = 1, 2, 3, \cdots, \end{cases} \tag{5.2.1}$$

其中

(i) $u = u(t,x)$, $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, $(t,x) \in G = R_+ \times \Omega$, 这里 Ω 是 R^n 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $R_+ = [0, +\infty)$;

(ii) $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k \cdots$ 且 $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$;

(iii) $g \in C[R, R]$, $f \in PC[R_+ \times \overline{\Omega}, R_+]$, $a \in PC[R_+, R_+]$, 这里 PC 表示具有如下性质的分片连续函数类: 仅 $t = t_k$, $k = 1, 2, \cdots$ 为间断点且为第一类间断点, 但在 $t = t_k$ 左连续;

(iv) $p, q: R_+ \times \overline{\Omega} \times R \to R$.

同时考虑第二边界条件:

$$\frac{\partial u}{\partial N} + r(t,x)u = \psi(t,x), \qquad (t,x) \in R_+ \times \partial\Omega, \quad t \neq t_k; \tag{B_1}$$

$$u=\varphi(t,x),\qquad (t,x)\in R_+\times\partial\Omega,\quad t\neq t_k, \tag{B$_2$}$$

其中 $r\in PC[R_+\times\partial\Omega,R_+],\varphi,\psi\in PC[R_+\times\partial\Omega,R],N$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 值得注意的是, 方程 (5.2.1) 满足某类边界条件的解 $u(t,x)$ 及其关于 t 的导函数 $u_t(t,x)$ 都是以 $t=t_k,k=1,2,\cdots$ 为第一类间断点的分片连续函数. 我们通常假设它们在脉冲瞬间满足如下关系式:

$$u(t_k^-,x)=u(t_k,x),\qquad u(t_k^+,x)=u(t_k,x)+p(t_k,x,u(t_k,x)),$$

$$u_t(t_k^-,x)=u_t(t_k,x),\qquad u_t(t_k^+,x)=u_t(t_k,x)+q(t_k,x,u(t_k,x)).$$

为方便起见, 我们给出如下假设:

(H$_1$) 对任何函数 $u\in PC[R_+\times\overline{\Omega},R_+]$ 有

$$\begin{aligned}p(t_k,x,-u(t_k,x))&=-p(t_k,x,u(t_k,x)),\qquad k=1,2,\cdots,\\ q(t_k,x,-u(t_k,x))&=-q(t_k,x,u(t_k,x)),\qquad k=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

且

$$\int_\Omega p(t_k,x,u(t_k,x))dx\leqslant\alpha_k\int_\Omega u(t_k,x)dx,\qquad k=1,2,\cdots,$$

$$\int_\Omega q(t_k,x,u(t_k,x))dx\leqslant\beta_k\int_\Omega u(t_k,x)dx,\qquad k=1,2,\cdots,$$

其中 $\alpha_k>0,\beta_k>0$ 为常数.

定义 5.2.1 设 $u(t,x)$ 是方程 (5.2.1) 满足某类边界条件的一个非零解, 若存在数 $\tau\geqslant0$ 使当 $(t,x)\in[\tau,+\infty)\times\Omega$ 时 $u(t,x)$ 不变号, 则称 $u(t,x)$ 在域 G 内是非振动的. 否则就说是振动的.

定理 5.2.1 设条件 (H$_1$) 成立, 又设如下条件成立:

(H$_2$) $g(u)$ 在 R^+ 是凸的且 $g(-u)=-g(u)<0,\quad u\in R_+$.

若二阶脉冲微分不等式

$$\begin{cases}y''(t)+F(t)g(y(t))\leqslant H(t), & t\neq t_k,\\ y(t_k^+)\leqslant(1+\alpha_k)y(t_k), & k=1,2,\cdots,\\ y'(t_k^+)\leqslant(1+\beta_k)y'(t_k), & k=1,2,\cdots\end{cases}\tag{5.2.2}$$

和

$$\begin{cases}y''(t)+F(t)g(y(t))\leqslant -H(t), & t\neq t_k,\\ y(t_k^+)\leqslant(1+\alpha_k)y(t_k), & k=1,2,\cdots,\\ y'(t_k^+)\leqslant(1+\beta_k)y'(t_k), & k=1,2,\cdots\end{cases}\tag{5.2.3}$$

都没有最终正解，则问题 (5.2.1),(B_1) 的每个非零解在区域 G 内是振动的，其中

$$F(t) = \min_{x\in\overline{\Omega}} f(t,x), |\Omega| = \int_{\Omega} dx, H(t) = \frac{a(t)}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega} \psi(t,x)dS, \qquad t \neq t_k,$$

dS 为 $\partial\Omega$ 的面积元素.

证明 设 $u(t,x)$ 是问题 (5.2.1),(B_1) 的一个非零解, 存在数 $\tau \geqslant 0$, 使当 $(t,x) \in [\tau,+\infty)\times\Omega$ 时 $u(t,x)$ 不变号. 不妨 $u(t,x) > 0, (t,x) \in [\tau,+\infty)\times\Omega$. 对于 $t\neq t_k$, 方程 (5.2.1) 两端在 Ω 上关于 x 积分得 $\dfrac{d^2}{dt^2}\displaystyle\int_{\Omega}(t,x)dx + \int_{\Omega} f(t,x)g(u(t,x))dx = a(t)\int_{\Omega}\Delta u(t,x)dx, t\neq t_k, t\geqslant\tau$. 利用 Green 定理得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\Delta u(t,x)dx &= \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial N}dS = \int_{\partial\Omega}[\psi(t,x) - r(t,x)u(t,x)]dS \\ &\leqslant \int_{\partial\Omega}\psi(t,x)dS, \qquad t\neq t_k, t\geqslant\tau.\end{aligned}$$

注意到条件 (H_2), 由 Jensen 不等式推知

$$\int_{\Omega} f(t,x)g(u(t,x))dx \geqslant F(t)|\Omega|g\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}u(t,x)dx\right), \qquad t\neq t_k, t\geqslant\tau.$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{dt^2}\int_{\Omega}u(t,x)dx + |\Omega|F(t)g\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}u(t,x)dx\right) \\ &\leqslant a(t)\int_{\partial\Omega}\psi(t,x)dx, \qquad t\neq t_k, t\geqslant\tau.\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

对于 $t = t_k$, 利用条件 (H_1), 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}[u(t_k^+,x) - u(t_k,x)]dx &= \int_{\Omega}p(t_k,x,u(t_k,x))dx \\ &\leqslant \alpha_k\int_{\Omega}u(t_k,x)dx, \qquad k=1,2,\cdots, \\ \int_{\Omega}[u_t(t_k^+,x) - u_t(t_k,x)]dx &= \int_{\Omega}q(t_k,x,u(t_k,x))dx \\ &\leqslant \beta_k\int_{\Omega}u_t(t_k,x)dx, \qquad k=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

即

$$\int_{\Omega}u(t_k^+,x)dx \leqslant (1+\alpha_k)\int_{\Omega}u(t_k,x)dx, \qquad k=1,2,\cdots, \tag{5.2.5}$$

$$\int_{\Omega}u_t(t_k^+,x)dx \leqslant (1+\beta_k)\int_{\Omega}u_t(t_k,x)dx, \qquad k=1,2,\cdots. \tag{5.2.6}$$

(5.2.4)~(5.2.6) 意味着函数 $y(t)=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(t,x)dx, t\geqslant\tau$ 是脉冲微分不等式 (5.2.2) 的一个正解. 此与定理的假设相矛盾. 若 $u(t,x)<0,(t,x)\in[\tau,+\infty)\times\Omega$, 则函数 $\overline{u}(t,x)=-u(t,x),(t,x)\in[\tau,+\infty)\times\Omega$ 是如下脉冲双曲边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}+f(t,x)g(u)=a(t)\Delta u, & t\neq t_k,(t,x)\in G,\\ \dfrac{\partial u}{\partial N}+r(t,x)u=-\psi(t,x), & t\neq t_k,(t,x)\in R_+\times\partial\Omega,\\ u(t_k^+,x)-u(t_k^-,x)=p(t_k,x,u), & k=1,2,\cdots,\\ u_t(t_k^+,x)-u_t(t_k^-,x)=q(t_k,x,u), & k=1,2,\cdots \end{cases}$$

的一个正解且满足

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega \overline{u}(t,x)dx+|\Omega|F(t)g\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \overline{u}(t,x)dx\right)\\ &\leqslant a(t)\int_{\partial\Omega}[-\psi(t,x)]dS, \qquad t\neq t_k,t\geqslant\tau, \end{aligned}$$

$$\int_\Omega \overline{u}(t_k^+,x)dx\leqslant(1+\alpha_k)\int_\Omega \overline{u}(t_k,x)dx, \qquad k=1,2,\cdots,$$

$$\int_\Omega \overline{u}(t_k^+,x)dx\leqslant(1+\beta_k)\int_\Omega \overline{u}(t_k,x)dx, \qquad k=1,2,\cdots.$$

此时函数 $\overline{y}(t)=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \overline{u}(t,x)dx, t\geqslant\tau$ 是脉冲微分不等式 (5.2.3) 的一个正解，同样得矛盾. □

在定理 5.2.2 的证明中我们需要如下引理.

引理 5.2.1[4](Dirichlet 问题)

$$\begin{cases} \Delta u+\lambda u=0, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{5.2.7}$$

的最小特征值 λ_0 和它相应的特征函数 $\Phi(x)$ 都是正的.

定理 5.2.2　设条件 (H_1) 和 (H_2) 成立. 若二阶脉冲微分不等式

$$\begin{cases} z''(t)+\lambda_0 z(t)+F(t)g(z(t))\leqslant R(t), & t\neq t_k,\\ z(t_k^+)\leqslant(1+\alpha_k)z(t_k), & k=1,2,\cdots,\\ z(t_k^+)\leqslant(1+\beta_k)z'(t_k), & k=1,2,\cdots \end{cases} \tag{5.2.8}$$

和

$$\begin{cases} z''(t)+\lambda_0 z(t)+F(t)g(z(t))\leqslant -R(t), & t\neq t_k, \\ z(t_k^+)\leqslant (1+\alpha_k)z(t_k), & k=1,2,\cdots, \\ z(t_k^+)\leqslant (1+\beta_k)z'(t_k), & k=1,2,\cdots \end{cases} \tag{5.2.9}$$

都没有最终正解，则问题 (5.2.1),(B_2) 的每个非零解在区域 G 内是振动的，其中

$$R(t)=-\frac{a(t)}{\int_\Omega \Phi(x)dx}\int_{\partial\Omega}\phi(t,x)\frac{\partial \Phi(x)}{\partial N}dS,$$

λ_0 与 $\Phi(x)$ 分别为 Dirichlet 问题 (5.2.7) 的最小特征值及其相应的特征函数.

证明 设 $u(t,x)$ 是问题 (5.2.1),(B_2) 的一个非零解且对某数 $\tau\geqslant 0$, 当 $(t,x)\in[\tau,+\infty)\times\Omega$ 时 $u(t,x)$ 不变号. 可设 $u(t,x)>0,(t,x)\in[\tau,+\infty)\times\Omega$.

对于 $t\neq t_k$, 方程 (5.2.1) 两端同乘特征函数 $\Phi(x)$ 并在 Ω 上关于 x 积分得

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega u(t,x)\Phi(x)dx+\int_\Omega f(t,x)g(u(t,x))\Phi(x)dx\\ =&\, a(t)\int_\Omega \Delta u(t,x)\Phi(x)dx, \qquad t\neq t_k, t\geqslant\tau.\end{aligned}$$

由 Green 定理推知

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta u(t,x)\Phi(x)dx=&\int_{\partial\Omega}\left[\Phi(x)\frac{\partial}{\partial N}u(t,x)-u(t,x)\frac{\partial}{\partial N}\Phi(x)\right]dS\\ &+\int_\Omega u(t,x)\Delta\Phi(x)dx\\ =&-\int_{\partial\Omega}\phi(t,x)\frac{\partial}{\partial N}\Phi(X)dS\\ &-\lambda_0\int_\Omega u(t,x)\Phi(x)dx, \qquad t\neq t_k, t\geqslant\tau.\end{aligned}$$

利用 Jensen 不等式得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega f(t,x)g(u(t,x))\Phi(x)dx\\ \geqslant&\, F(t)\int_\Omega \Phi(x)dx\cdot g\left(\frac{1}{\int_\Omega \Phi(x)dx}\int_\Omega u(t,x)\Phi(x)dx\right), \qquad t\neq t_k, t\geqslant\tau.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega u(t,x)\Phi(x)dx+\lambda_0\int_\Omega u(t,x)\Phi(x)dx\\&+\int_\Omega \Phi(x)dx\cdot F(x)g\left(\frac{1}{\int_\Omega \Phi(x)dx}\int_\Omega u(t,x)\Phi(x)dx\right)\\\leqslant&-a(t)\int_{\partial\Omega}\phi(t,x)\frac{\partial}{\partial N}\Phi(x)dS,\qquad t\neq t_k,t\geqslant\tau.\end{aligned}\tag{5.2.10}$$

对于 $t=t_k$, 由条件 (H_1) 可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega[u(t_k^+,x)-u(t_k,x)]\Phi(x)dx\\=&\int_\Omega p(t_k,x,u(t_k,x))\Phi(x)dx\leqslant\alpha_k\int_\Omega u(t_k,x)\Phi(x)dx,\qquad k=1,2,\cdots,\\&\int_\Omega[u_t(t_k^+,x)-u_t(t_k,x)]\Phi(x)dx\\=&\int_\Omega q(t_k,x,u(t_k,x))\Phi(x)dx\leqslant\beta_k\int_\Omega u_t(t_k,x)\Phi(x)dx,\qquad k=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

即

$$\int_\Omega u(t_k^+,x)\Phi(x)dx\leqslant(1+\alpha_k)\int_\Omega u(t_k,x)\Phi(x)dx,\qquad k=1,2,\cdots,\tag{5.2.11}$$

$$\int_\Omega u_t(t_k^+,x)\Phi(x)dx\leqslant(1+\beta_k)\int_\Omega u_t(t_k,x)\Phi(x)dx,\qquad k=1,2,\cdots.\tag{5.2.12}$$

(5.2.10) ~ (5.2.12) 意味着函数 $Z(t)=\dfrac{1}{\int_\Omega \Phi(x)dx}\displaystyle\int_\Omega u(t,x)\Phi(x)dx,t\geqslant\tau$ 是脉冲微分不等式 (5.2.8) 的一个正解，此与定理假设相矛盾.

若 $u(t,x)<0,(t,x)\in[\tau,+\infty)\times\Omega$, 则函数 $\bar{u}(t,x)=-u(t,x),(t,x)\in[\tau,+\infty)\times\Omega$ 是如下脉冲双曲边值问题：

$$\begin{cases}u_{tt}+f(t,x)g(u)=a(t)\Delta u, & t\neq t_k,\quad (t,k)\in G,\\ u=-\phi(t,x), & t\neq t_k,\quad (t,x)\in R_+\times\partial\Omega,\\ u(t_k^+,x)-u(t_k^-,x)=p(t_k,x,u), & k=1,2,\cdots,\\ u_t(t_k^+,x)-u_t(t_k^-,x)=q(t_k,x,u), & k=1,2,\cdots\end{cases}$$

的一个正解且满足

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega \bar{u}(t,x)\Phi(x)dx+\lambda_0\int_\Omega \bar{u}(t,x)\Phi(x)dx$$
$$+\int_\Omega \Phi(x)dx\cdot F(t)g\left[\frac{1}{\int_\Omega \Phi(x)dx}\int_\Omega \bar{u}(t,x)\Phi(x)dx\right]$$
$$\leqslant -a(t)\int_{\partial\Omega}[-\phi(t,x)]\frac{\partial}{\partial N}\Phi(x)dS, \qquad t\neq t_k, t\geqslant\tau.$$

$$\int_\Omega \bar{u}(t_k^+,x)\Phi(x)dx\leqslant(1+\alpha_k)\int_\Omega \bar{u}(t_k,x)\Phi(x)dx, \qquad k=1,2,\cdots,$$
$$\int_\Omega \bar{u}_t(t_k^+,x)\Phi(x)dx\leqslant(1+\beta_k)\int_\Omega \bar{u}_t(t_k,x)\Phi(x)dx, \qquad k=1,2,\cdots.$$

此示函数 $\bar{Z}(t)=\dfrac{1}{\int_\Omega \Phi(x)dx}\displaystyle\int_\Omega \bar{u}(t,x)\Phi(x)dx, t\geqslant\tau$ 是脉冲微分不等式 (5.2.9) 的一个正解，同样导致矛盾. □

在定理 5.2.1 和定理 5.2.2 中分别令 $\psi(t,x)=0$ 和 $\phi(t,x)=0$, 可得如下定理 5.2.3 和定理 5.2.4.

定理 5.2.3 设条件 (H_1) 和 (H_2) 成立. 若脉冲微分不等式

$$\begin{cases} y''(t)+F(t)g(u(t))\leqslant 0, & t\neq t_k, \\ y(t_k^+)\leqslant(1+\alpha_k)y(t_k), & k=1,2,\cdots, \\ y'(t_k^+)\leqslant(1+\beta_k)y'(t_k), & k=1,2,\cdots \end{cases} \tag{5.2.13}$$

没有最终正解，则脉冲双曲方程 (5.2.1) 满足边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial N}+r(t,x)u=0, \qquad (t,x)\in R_+\times\partial\Omega, \quad t\neq t_k \tag{B_1^*}$$

的每个非零解在区域 G 内是振动的.

定理 5.2.4 设条件 (H_1) 和 (H_2) 成立. 若脉冲微分不等式

$$\begin{cases} Z''(t)+\lambda_0 Z(t)+F(t)g(Z(t))\leqslant 0, & t\neq t_k, \\ Z(t_k^+)\leqslant(1+\alpha_k)Z(t_k), & k=1,2,\cdots, \\ Z'(t_k^+)\leqslant(1+\beta_k)Z'(t_k), & k=1,2,\cdots \end{cases} \tag{5.2.14}$$

没有最终正解，则脉冲双曲方程 (5.2.1) 满足边界条件

$$u=0, \qquad (t,x)\in R_+\times\partial\Omega, \quad t\neq t_k \tag{B_2^*}$$

的每个非零解在区域 G 内是振动的.

我们在上面讨论的基础上给出脉冲双曲边值 (5.2.1),(B_1) 和 (5.2.1),(B_2) 非零解振动的进一步结果. 我们需要如下引理:

引理 5.2.2[10]　设 $0 \leqslant t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = +\infty; m \in PC^1[R_+, R], h \in PC[R_+, R], b_k, k = 1, 2, \cdots$ 为常数. 若 $m'(t) \leqslant h(t), t \neq t_k, t \geqslant t_0, m(t_k^+) \leqslant (1 + b_k)m(t_k), \quad k = 1, 2, \cdots$, 则

$$m(t) \leqslant \prod_{t_0<t_k<t}(1+b_k)m(t_0) + \int_{t_0}^{t} \prod_{s<t_k<t}(1+b_k)h(s)ds, \qquad t \geqslant t_0.$$

定理 5.2.5　设条件 (H_1) 和 (H_2) 成立. 若

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k < \infty, \tag{5.2.15}$$

且对每个充分大的 τ 有

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_\tau^t \prod\limits_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)\int_\tau^\eta \prod\limits_{s<t_k<\eta}(1+\beta_k)H(s)dsd\eta}{\int_\tau^t \prod\limits_{\tau<t_k<\eta}(1+\beta_k)\prod\limits_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)d\eta} = -\infty, \tag{5.2.16}$$

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_\tau^t \prod\limits_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)\int_\tau^\eta \prod\limits_{s<t_k<\eta}(1+\beta_k)H(s)dsd\eta}{\int_\tau^t \prod\limits_{\tau<t_k<\eta}(1+\beta_k)\prod\limits_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)d\eta} = +\infty, \tag{5.2.17}$$

则问题 (5.2.1),(B_1) 的每个非零解在区域 G 内是振动的.

证明　由定理 5.2.1, 只需证二阶非齐次脉冲微分不等式 (5.2.2) 和 (5.2.3) 都没有最终正解. 设 $y(t)$ 是脉冲微分不等式 (5.2.2) 的一个最终正解. 则存在数 $\tau \geqslant 0$ 使得 $y(t) > 0, t \geqslant \tau$. 注意到当 $y(t) > 0$ 时, $g(y(t)) > 0$, 可得 $y''(t) \leqslant H(t), t \neq t_k, t \geqslant \tau$. 与上式同时考虑不等式 $y'(t_k^+) \leqslant (1 + \beta_k)y'(t_k), k = 1, 2, \cdots$, 并利用引理 5.2.2 得

$$y'(t) \leqslant \prod_{\tau<t_k<t}(1+\beta_k)y'(\tau) + \int_\tau^t \prod_{s<t_k<t}(1+\beta_k)H(s)ds, \qquad t \geqslant \tau. \tag{5.2.18}$$

现考虑 (5.2.18) 与不等式 $y(t_k^+) \leqslant (1 + \alpha_k)y(t_k), k = 1, 2, \cdots$, 并再次利用引理 5.2.2 得

$$\begin{aligned} y(t) \leqslant & \prod_{\tau<t_k<t}(1+\alpha_k)y(\tau) + \int_\tau^t \prod_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k) \\ & \times \left[\prod_{\tau<t_k<\eta}(1+\beta_k)y'(t) + \int_\tau^\eta \prod_{s<t_k<\eta}(1+\beta_k)H(s)ds\right]d\eta \end{aligned}$$

$$= \prod_{\tau<t_k<t}(1+\alpha_k)y(\tau) + y'(\tau)\int_\tau^t \prod_{\tau<t_k<\eta}(1+\beta_k)\prod_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)d\eta$$

$$+\int_\tau^t \prod_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)\int_\tau^\eta \prod_{s<t_k<t}(1+\beta_k)H(s)dsd\eta, \qquad t\geqslant\tau. \tag{5.2.19}$$

对于 $t>\tau$, 存在正整数 m 使得 $t_m<t\leqslant t_{m+1}$, 则可推知

$$\int_\tau^t \prod_{\tau<t_k<\eta}(1+\beta_k)\prod_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)d\eta$$

$$\leqslant \int_\tau^{t_1}\prod_{k=1}^m(1+\alpha_k)d\eta + \sum_{j=1}^{m-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\prod_{k=1}^j(1+\beta_k)\prod_{k=j+1}^m(1+\alpha_k)d\eta$$

$$+\int_{t_m}^{t_{m+1}}\prod_{k=1}^m(1+\beta_k)d\eta$$

$$= \prod_{k=1}^m(1+\alpha_k)(t_1-\tau) + \sum_{j=1}^{m-1}\left[\prod_{k=1}^j(1+\beta_k)\prod_{k=j+1}^m(1+\alpha_k)(t_{j+1}-t_j)\right]$$

$$+\prod_{k=1}^m(1+\beta_k)(t_{m+1}-t_m) < +\infty. \tag{5.2.20}$$

于是对于 $t>\tau$, 不等式 (5.2.19) 两边同除以 (5.2.20) 左端得

$$\frac{y(t)}{\int_\tau^t \prod_{\tau<t_k<\eta}(1+\beta_k)\prod_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)d\eta} \leqslant \frac{\prod_{\tau<t_k<t}(1+\alpha_k)y(\tau)}{\int_\tau^t \prod_{\tau<t_k<\eta}(1+\beta_k)\prod_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)d\eta} + y'(\tau)$$

$$+\frac{\int_\tau^t \prod_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)\int_\tau^\eta \prod_{s<t_k<\eta}(1+\beta_k)H(s)dsd\eta}{\int_\tau^t \prod_{\tau<t_k<\eta}(1+\beta_k)\prod_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)d\eta}.$$

又注意 $\int_\tau^t \prod_{\tau<t_k<\eta}(1+\beta_k)\prod_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)d\eta \to +\infty, t\to+\infty$, 并利用 (5.2.15), (5.2.16) 推得

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{\int_\tau^t \prod_{\tau<t_k<\eta}(1+\beta_k)\prod_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)d\eta} = -\infty. \tag{5.2.21}$$

另一方面，由 $y(t)>0, t\geqslant\tau$, 又有

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{\int_\tau^t \prod_{\tau<t_k<\eta}(1+\beta_k)\prod_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)d\eta} \geqslant 0.$$

此与 (5.2.21) 相矛盾. 因此, 脉冲微分不等式 (5.2.2) 没有最终正解. 利用 (5.2.17), 我们有

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{\int_\tau^t\prod\limits_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)\int_\tau^\eta\prod\limits_{s<t_k<\eta}(1+\beta_k)[-H(s)]dsd\eta}{\int_\tau^t\prod\limits_{\tau<t_k<\eta}(1+\beta_k)\prod\limits_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)d\eta}$$

$$=-\limsup_{t\to+\infty}\frac{\int_\tau^t\prod\limits_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)\int_\tau^\eta\prod\limits_{s<t_k<\eta}(1+\beta_k)H(s)dsd\eta}{\int_\tau^t\prod\limits_{\tau<t_k<\eta}(1+\beta_k)\prod\limits_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)d\eta}=-\infty.$$

因此, 可根据同样的理由推知脉冲微分不等式 (5.2.3) 没有最终正解. □

利用定理 5.2.2 和引理 5.2.2, 类似定理 5.2.5 的方法可得如下定理.

定理 5.2.6 设条件 (H_1),(H_2) 和 (5.2.15) 成立. 若对每个充分大的 τ 有

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{\int_\tau^t\prod\limits_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)\int_\tau^\eta\prod\limits_{s<t_k<\eta}(1+\beta_k)R(s)dsd\eta}{\int_\tau^t\prod\limits_{\tau<t_k<\eta}(1+\beta_k)\prod\limits_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)d\eta}=-\infty,$$

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\int_\tau^t\prod\limits_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)\int_\tau^\eta\prod\limits_{s<t_k<\eta}(1+\beta_k)R(s)dsd\eta}{\int_\tau^t\prod\limits_{\tau<t_k<\eta}(1+\beta_k)\prod\limits_{\eta<t_k<t}(1+\alpha_k)d\eta}=+\infty,$$

则问题 (5.2.1),(B_2) 的每个非零解在区域 G 内是振动的.

定理 5.2.7 设条件 (H_1),(H_2) 和 (5.2.15) 成立. 又设

(i) $\dfrac{g(y)}{y}\geqslant\varepsilon, y\in(0,+\infty)$, 其中 $\varepsilon>0$ 为常数;

(ii) $p(t,x,u)\mid_{t=t_k}\geqslant 0, (t,x,u)\in R_+\times\bar{\Omega}\times R_+, k=1,2,\cdots$;

(iii) 对充分大的 τ 有 $\limsup\limits_{t\to+\infty}\int_\tau^t\prod\limits_{s<t_k<t}(1+\beta_k)F(s)ds=+\infty$,

则问题 (5.2.1),(B_1^*) 的每个非零解在区域 G 内是振动的.

证明 设 $u(t,x)$ 是问题 (5.2.1),(B_1^*) 的一个非零解, 且对某常数 $\tau\geqslant 0$, 当 $(t,x)\in[\tau,+\infty)\times\Omega$ 时 $u(t,x)$ 不变号. 可设 $u(t,x)\geqslant 0,(t,x)\in[\tau,+\infty)\times\Omega$, 类似定理 5.2.1 证明可知函数 $y(t)=\dfrac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(t,x)dx, t\geqslant\tau$ 是齐次脉冲微分不等式 (5.2.13) 的正解. 我们有 $y''(t)\leqslant 0, t\neq t_k, t\geqslant\tau$. 往证

$$y'(t)\geqslant 0,\qquad t\geqslant\tau.\tag{5.2.22}$$

若不然, 则存在数 $t^*\geqslant\tau$ 使得 $y'(t^*)<0$. 现考虑 $y''(t)\leqslant 0, t\neq t_k, t\geqslant t^*, y'(t_k^+)\leqslant(1+\beta_k)y'(t_k),\quad k=1,2,\cdots$, 由引理 5.2.2 得

$$y'(t)\leqslant\prod_{t^*<t_k<t}(1+\beta_k)y'(t^*),\qquad t\geqslant t^*.\tag{5.2.23}$$

再考虑 (5.2.23) 与不等式 $y(t_k^+) \leqslant (1+\alpha_k)y(t_k), k=1,2,\cdots$, 再利用引理 5.2.2 得

$$\begin{aligned} y(t) &\leqslant \prod_{t^*<t_k<t}(1+\alpha_k)y(t^*) + \int_{t^*}^{t}\prod_{s<t_k<t}(1+\alpha_k)\left[\prod_{t^*<t_k<s}(1+\beta_k)y'(t^*)\right]ds \\ &= \prod_{t^*<t_k<t}(1+\alpha_k)y(t^*) + y'(t^*)\int_{t^*}^{t}\prod_{t^*<t_k<s}(1+\beta_k)\prod_{s<t_k<t}(1+\alpha_k)ds, \qquad t \geqslant t^*. \end{aligned}$$

上面不等式中令 $t \to +\infty$, 注意到 (5.2.15) 及

$$\int_{t^*}^{t}\prod_{t^*<t_k<s}(1+\beta_k)\prod_{s<t_k<t}(1+\alpha_k)ds \to +\infty, \qquad t \to +\infty$$

推知 $\limsup\limits_{t\to+\infty} y(t) = -\infty$. 此与 $y(t)>0, t\geqslant\tau$ 相矛盾. 于是 (5.2.22) 成立.

令 $V(t) = \dfrac{y'(t)}{y(t)}, t\geqslant\tau$, 则 $V(t)\geqslant 0, t\geqslant\tau$. 利用假设 (i) 推知

$$V'(t) = \frac{y''(t)}{y(t)} - \left[\frac{y'(t)}{y(t)}\right]^2 \leqslant \frac{-\epsilon F(t)y(t)}{y(t)} = -\epsilon F(t), \qquad t\neq t_k, \quad t\geqslant\tau. \qquad (5.2.24)$$

而当 $t=t_k$ 时, 由假设 (ii) 知 $\int_\Omega [u(t_k^+,x)-u(t_k,x)]dx = \int_\Omega p(t_k,x,u(t_k,x))dx \geqslant 0$, 则有 $y(t_k) = \dfrac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(t_k,x)dx \leqslant \dfrac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(t_k^+,x)dx = y(t_k^+)$. 于是

$$V(t_k^+) = \frac{y'(t_k^+)}{y(t_k^+)} \leqslant \frac{(1+\beta_k)y'(t_k)}{y(t_k)} = (1+\beta_k)V(t_k), \qquad k=1,2,\cdots. \qquad (5.2.25)$$

考虑 (5.2.24) 和 (5.2.25), 由引理 5.2.2 得

$$V(t) \leqslant \prod_{\tau<t_k<t}(1+\beta_k)V(\tau) - \epsilon\int_\tau^t \prod_{s<t_k<t}(1+\beta_k)F(s)ds.$$

令 $t\to+\infty$, 注意到 (5.2.15) 及假设 (iii), 导致与 $V(t)\geqslant 0, t\geqslant\tau$ 相矛盾.

若 $u(t,x)<0, (t,x)\in[\tau,+\infty)\times\Omega$, 则易验证 $\overline{u}(t,x) = -u(t,x), (t,x)\in[\tau,+\infty)\times\Omega$ 是问题 (5.2.1),(B_1^*) 的一个正解, 于是用类似理由也可推得矛盾. □

利用引理 5.2.2, 用类似定理 5.2.7 的方法可得如下定理:

定理 5.2.8 若定理 5.2.7 的全部假设成立, 则问题 (5.2.1),(B_2^*) 的每个非零解在区域 G 内是振动的.

例 5.2.1　考虑脉冲双曲边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}+3ue^{\frac{1}{2}u}t^2\left(1+\sin\dfrac{x}{2}\right)=a(t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t\neq\dfrac{k\pi}{2},(t,x)\in R_+\times(0,\pi),\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, & t\neq\dfrac{k\pi}{2},t\geqslant 0,\\ u(t_k^+,x)-u(t_k^-,x)=t_k^{-5}u(t_k,x)\cos\dfrac{x}{2}, & t_k=\dfrac{k\pi}{2},k=1,2,\cdots,\\ u_t(t_k^+,x)-u(t_k^-,x)=t_k^{-3}u(t_k,x)\sin x, & t_k=\dfrac{k\pi}{2},k=1,2,\cdots, \end{cases} \tag{5.2.26}$$

其中

$$a(t)=\begin{cases} a_0, & t=0,\quad a_0>0\text{为常数},\\ a_0+\dfrac{1}{1-\cos 4t}, & t\neq\dfrac{k\pi}{2},k=1,2,\cdots. \end{cases}$$

现在

$$n=1,\qquad \Omega=(0,\pi),\quad f(t,x)=t^2\left(1+\sin\frac{x}{2}\right),\quad g(u)=3ue^{\frac{1}{2}u},$$

$$F(t)=\min_{x\in[0,\pi]}f(t,x)=t^2,\quad p(t,x,u)=t^{-5}u\cos\frac{x}{2},\quad q(t,x,u)=t^{-3}u\sin x.$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_0^\pi p\left(\frac{k\pi}{2},x,u\left(\frac{k\pi}{2},x\right)\right)dx&=\int_0^\pi\left(\frac{k\pi}{2}\right)^{-5}u\left(\frac{k\pi}{2},x\right)\cos\frac{x}{2}dx\\&\leqslant\left(\frac{k\pi}{2}\right)^{-5}\int_0^\pi u\left(\frac{k\pi}{2},x\right)dx,\\ \int_0^\pi q\left(\frac{k\pi}{2},x,u\left(\frac{k\pi}{2},x\right)\right)dx&=\int_0^\pi\left(\frac{k\pi}{2}\right)^{-3}u\left(\frac{k\pi}{2},x\right)\sin x dx\\&\leqslant\left(\frac{k\pi}{2}\right)^{-3}\int_0^\pi u\left(\frac{k\pi}{2},x\right)dx.\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{(\frac{k\pi}{2})^5}<+\infty,\qquad \sum_{k=1}^\infty\frac{1}{(\frac{k\pi}{2})^3}<+\infty$$

和

$$p(t,x,u)|_{t=\frac{k\pi}{2}}=t^{-5}u\cos\frac{x}{2}|_{t=\frac{k\pi}{2}}\geqslant 0,\qquad (t,x,u)\in R_+\times[0,\pi]\times R_+,$$

且对任何充分大的 τ 有

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_\tau^t\prod_{s<\frac{k\pi}{2}<t}\left(1+\frac{1}{(\frac{k\pi}{2})^3}\right)s^2ds=+\infty.$$

易知定理 5.2.8 的全部条件都满足. 于是问题 (5.2.26) 的每个非零解在区域 $R_+\times(0,\pi)$ 内是振动的.

§5.3 具有时滞的脉冲抛物系统的振动准则

本节给出具有时滞的满足 Robin 边界条件的脉冲抛物系统的振动准则.

考虑如下的具有时滞的脉冲抛物系统:

$$\begin{cases} u_t = a(t)\Delta u + b(t)\Delta u(t-\tau, x) - P(t,x)u - q(t,x)h(u(t-r,x)), & t \neq t_k; \\ u(t_k^+, x) - u(t_k^-, x) = I(t, x, u), \quad t = t_k, \quad k = 1, 2, \cdots, \end{cases} \tag{5.3.1}$$

其中

(i) Δ 是 R^n 空间中的拉普拉斯算子, $u = u(t,x)$, 其中 $(t,x) \in G = R_+ \times \Omega$, 此处 Ω 为 R^n 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $R_+ = [0, +\infty)$;

(ii) $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = +\infty$;

(iii) $a, b \in PC[R_+, R_+]$, $p, q \in PC[R_+ \times \bar{\Omega}, R_+]$, 其中 PC 代表仅在 $t = t_k$, $k = 1, 2, \cdots$ 处具有第一类间断点的且在 $t = t_k$ 处为左连续的函数类, $h \in C[R, R]$;

(iv) τ 和 r 均为正常数;

(v) $I:\ R_+ \times \bar{\Omega} \times R \to R$.

考虑如下 Robin 边界条件:

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \mu(x)u = 0, \qquad (t,x) \in R_+ \times \partial\Omega, \ t \neq t_k, \tag{A}$$

其中 $\mu \in (\partial\Omega, (0, +\infty))$, N 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

假设抛物边值问题 (5.3.1), (A) 的解 $u(t,x)$ 是在脉冲点 $t = t_k, k = 1, 2, \cdots$ 处是第一类间断点的分段连续函数. 为了便于讨论, 我们不妨假设 $u(t,x)$ 在间断点处是左连续的, 且满足

$$u(t_k^-, x) = u(t_k, x), \qquad u(t_k^+, x) = u(t_k, x) + I(t_k, x, u(t_k, x)).$$

定义 5.3.1 我们称问题 (5.3.1),(A) 的非零解 $u(t,x)$ 是区域 G 上的非振动解, 如果存在一个数 $\sigma \geqslant 0$ 满足当 $(t,x) \in [\sigma, +\infty) \times \Omega$ 时 $u(t,x)$ 为常符号. 否则称为振动的.

引理 5.3.1 假设如下条件满足

(H1) $h(u)$ 为区间 $(0, +\infty)$ 上的正凸函数;

(H2) 对任意的函数 $u \in PC[R_+ \times \bar{\Omega}, R_+]$ 和常数 $\alpha_k > 0$ 满足

$$\int_\Omega I(t_k, x, u(t_k, x))dx \leqslant \alpha_k \int_\Omega u(t_k, x)dx, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

若问题 (5.3.1), (A) 的解 $u(t,x)$ 在区间 $[\sigma,+\infty)\times\Omega$ 为正的，这 Ω 为某非负常数，则具有时滞的脉冲微分不等式

$$\begin{cases} U'(t)+P(t)U(t)+Q(t)h(U(t-r))\leqslant 0, & t\neq t_k, \\ U(t_k^+)\leqslant(1+\alpha_k)U(t_k), & k=1,2,\cdots \end{cases} \tag{5.3.2}$$

有最终正解

$$U(t)=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(t,x)dx, \tag{5.3.3}$$

其中

$$P(t)=\min_{x\in\bar\Omega}p(t,x),\qquad Q(t)=\min_{x\in\bar\Omega}q(t,x),\qquad |\Omega|=\int_\Omega dx.$$

证明　假设 $u(t,x)$ 为问题 (5.3.1),(A) 在区间 $[\sigma,+\infty)\times\Omega$ 的一个正解. 对于 $t\neq t_k$, $k=1,2,\cdots$, 存在一个 $t_1\geqslant\sigma$ 满足当 $(t,x)\in[t_1,+\infty)\times\Omega$ 时

$$u(t-\tau,x)>0\quad 且\quad u(t-r,x)>0.$$

对 (5.3.1) 式两边在区间 Ω 上关于 x 积分得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)dx=&\,a(t)\int_\Omega\Delta u(t,x)dx+b(t)\int_\Omega\Delta u(t-\tau,x)dx\\ &-\int_\Omega p(t,x)u(t,x)dx\\ &-\int_\Omega q(t,x)h(u(t-r,x))dx,\qquad t\neq t_k,\quad t\geqslant t_1.\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

由 Green 定理得

$$\begin{aligned}\int_\Omega\Delta u(t,x)dx&=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u(t,x)}{\partial N}dS\\ &=-\int_{\partial\Omega}\mu(x)u(t,x)dS\leqslant 0,\qquad t\neq t_k,\ t\geqslant t_1,\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

$$\int_\Omega\Delta u(t-\tau,x)dx=-\int_{\partial\Omega}\mu(x)u(t-\tau,x)dS\leqslant 0,\qquad t\neq t_k,\ t\geqslant t_1, \tag{5.3.6}$$

其中 dS 为在 $\partial\Omega$ 上的面积分微元. 利用 Jensen 不等式得

$$\int_\Omega h(u(t-r,x))dx\geqslant|\Omega|\cdot h\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(t-r,x)dx\right),\qquad t\neq t_k,\ t\geqslant t_1, \tag{5.3.7}$$

其中 $|\Omega|=\int_\Omega dx$. 由 (5.3.4)~(5.3.7) 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)dx+P(t)\int_\Omega u(t,x)dx+Q(t)|\Omega|h\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(t-r,x)dx\right)\\ \leqslant&-a(t)\int_{\partial\Omega}\mu(x)u(t,x)dS-b(t)\int_{\partial\Omega}\mu(x)u(t-\tau,x)dS\\ \leqslant&\,0,\qquad t\neq t_k,\ t\geqslant t_1.\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

对于 $t=t_k$, $k=1,2,\cdots$, 利用 (H2) 得

$$\int_\Omega [u(t_k^+,x)-u(t_k,x)]dx = \int_\Omega I(t_k,x,u(t_k,x))dx \leqslant \alpha_k\int_\Omega u(t_k,x)dx, \qquad k=1,2,\cdots,$$

即

$$\int_\Omega u(t_k^+,x)dx \leqslant (1+\alpha_k)\int_\Omega u(t_k,x)dx, \qquad k=1,2,\cdots. \tag{5.3.9}$$

这样 (5.3.8),(5.3.9) 表明由 (5.3.3) 定义的函数 $U(t)$ 是脉冲时滞微分不等式 (5.3.2) 在 $t\geqslant t_1$ 时的一个正解. □

定理 5.3.1 假设条件 (H1),(H2) 均成立且满足

(H3) $h(-u)=-h(u)$, $\quad u\in(0,+\infty)$,

$$I(t_k,x,-u(t_k,x))=-I(t_k,x,u(t_k,x)), \qquad k=1,2,\cdots.$$

如果脉冲时滞微分不等式 (5.3.2) 没有最终正解, 则问题 (5.3.1), (A) 的任意非零解在区域 G 上是振动的.

证明 假设 $u(t,x)$ 为问题 (5.3.1),(A) 在区域 $[\Omega,+\infty)\times\Omega$ 上的常号非零解.

若当 $(t,x)\in[0,+\infty)\times\Omega$ 时有 $u(t,x)>0$, 则根据引理 1 知由 (5.3.3) 定义的函数 $U(t)$ 是不等式 (5.3.2) 的一个最终正解, 这与定理的条件矛盾.

若当 $(t,x)\in[0,+\infty)\times\Omega$ 时有 $u(t,x)<0$, 则令

$$\widetilde{u}(t,x)=-u(t,x), \qquad (t,x)\in[0,+\infty)\times\Omega.$$

根据条件 (H3), 易验证 $\widetilde{u}(t,x)$ 是问题 (5.3.1), (A) 的一个正解, 亦可导致矛盾. 定理 1 得证. □

由定理 1 知, 关于满足 Robin 边界条件的脉冲时滞抛物系统 (5.3.1) 的振动准则的研究, 可转化为关于一阶脉冲时滞微分不等式 (5.3.2) 解的性质的研究. 由此可进一步得到如下振动准则.

定理 5.3.2 假设条件 (H1), (H2), (H3) 成立, 并且

(i) 对某正常数 $m>0$, $\dfrac{h(u)}{u}\geqslant m$, $u\in(0,+\infty)$;

(ii) 存在 $\rho>0$, 满足

$$t_{k+1}-t_k\geqslant\rho, \qquad k=1,2,\cdots,$$

且 $r\geqslant\rho$;

(iii) $\displaystyle\limsup_{k\to+\infty}\frac{1}{1+\alpha_k}\int_{t_k}^{t_k+\rho}Q(s)e^{\int_{s-r}^{s}p(\xi)d\xi}ds>\frac{1}{m}$,

那么问题 (5.3.1), (A) 在区域 G 上每一个非零解都是振动的.

证明　假定结论不真，那么对某 $\sigma \geqslant 0$, 问题 (5.3.1), (A) 在区域 $[\sigma, +\infty) \times \Omega$ 上存在一个常号的非零解 $u(t,x)$. 不妨设 $u(t,x) > 0$, $(t,x) \in [\sigma, +\infty) \times \Omega$, 则由 (5.3.3) 定义知，在 $t \geqslant \sigma + \tau^*$ 上满足不等式 (5.3.2) 的解 $U(t)$ 是正解，并且满足

$$U(t-r) > 0,\quad h(U(t-r)) > 0, \qquad t \geqslant \sigma + \tau^*,$$

其中 $\tau^* = \max\{\tau, r\}$. 因为

$$U'(t) \leqslant -P(t)U(t) - Q(t)h(U(t-r)) \leqslant 0, \qquad t \geqslant \sigma + \tau^*,\ t \neq t_k,$$

所以 $U(t)$ 在区间 $t \in (t_k, t_{k+1})$, $k = 1, 2, \cdots$ 上是单调不增的. 在 (5.3.2) 式两端同乘以 $e^{\int_{t_k}^t P(\xi)d\xi}$, $t > t_k \geqslant \sigma + \tau^*$ 且令

$$y(t) = U(t)e^{\int_{t_k}^t P(\xi)d\xi}, \qquad t > t_k, \tag{5.3.10}$$

则有

$$y'(t) + Q(t)e^{\int_{t_k}^t P(\xi)d\xi}h[y(t-r)e^{-\int_{t_k}^{t-r} P(\xi)d\xi}] \leqslant 0, \qquad t \neq t_k,\ t > t_k. \tag{5.3.11}$$

由 (5.3.10), (5.3.11) 得 $y(t)$ 是一个非增函数.

对 $t = t_k$,

$$\Delta y(t_k) = [U(t_k^+) - U(t_k)]e^{\int_{t_k}^t P(\xi)d\xi} \leqslant \alpha_k U(t_k)e^{\int_{t_k}^t P(\xi)d\xi} = \alpha_k y(t_k). \tag{5.3.12}$$

对 (5.3.11) 从 t_k 到 $t_k + \rho$ 积分，有

$$y(t_k+\rho) - y(t_k^+) + \int_{t_k^+}^{t_k+\rho} Q(s)e^{\int_{t_k}^s P(\xi)d\xi}h[y(s-r)e^{-\int_{t_k}^{s-r} P(\xi)d\xi}]ds \leqslant 0.$$

由条件 (1) 及函数 $y(t)$ 的非增性得

$$y(t_k+\rho) - y(t_k^+) + my(t_k+\rho-r)\int_{t_k^+}^{t_k+\rho} Q(s)e^{\int_{s-r}^s P(\xi)d\xi}ds \leqslant 0,$$

从而有

$$y(t_k+\rho) - y(t_k^+) + my(t_k)\int_{t_k^+}^{t_k+\rho} Q(s).e^{\int_{s-r}^s P(\xi)d\xi}ds \leqslant 0. \tag{5.3.13}$$

由条件 (5.3.12), (5.3.13) 得

$$y(t_k+\rho) + y(t_k^+)\left[\frac{m}{1+\alpha_k}\int_{t_k}^{t_k+\rho} Q(s)e^{\int_{s-r}^s P(\xi)d\xi}ds - 1\right] \leqslant 0,$$

这与条件 (iii) 矛盾.

如果 $u(t,x)<0,(t,x)\in[\sigma,+\infty)\times\Omega$, 那么 $-u(t,x)$ 是问题 (5.3.1), (A) 在区间 $(t,x)\in[\sigma,+\infty)\times\Omega$ 上的正解. 类似前面分析也可以得到矛盾. □

类似定理 5.3.2 的证明可得出如下结论.

定理 5.3.3 假设条件 (H1), (H2), (H3) 均满足, 更进一步假设

(i) $\dfrac{h(u)}{u}\geqslant m$ 且对某一常数 $m>0$,$u\in(0,+\infty)$;

(ii) $t_{k+1}-t_k\geqslant\rho,\quad k=1,2,\cdots$ 且 $\rho>r$;

(iii) $\limsup\limits_{k\to+\infty}\dfrac{1}{1+\alpha_k}\displaystyle\int_{t_k}^{t_k+r}Q(s)e^{\int_{s-r}^{s}P(\xi)d\xi}ds>\dfrac{1}{m}$,

则问题 (5.3.1), (A) 的任意非零解在区域 G 上是振动的.

引理 5.3.2 如果存在一个常数 $\rho>0$, 使得

$$t_{k+1}-t_k\geqslant\rho,\qquad k=1,2,\cdots,$$

则存在一个常数 $\beta\in N$, 满足对 $t>0$ 的任意区间 $[t,t+\tau^*]$ 上的脉冲时刻数均不大于 β, 此处 $\tau^*=\max\{\tau,r\}$.

证明 容易看出对每一个区间 $[t,t+\tau^*]$ 上至多存在 $1+\left[\dfrac{\tau^*}{\rho}\right]$ 个脉冲时刻. 因此我们可取 $\beta\geqslant1+\left[\dfrac{\tau^*}{\rho}\right]$. □

定理 5.3.4 假设条件均成立, 且满足

(i) $\dfrac{h(u)}{u}\geqslant m$ 且对某一常数 $m>0$,$u\in(0,+\infty)$;

(ii) 存在一个常数 $\rho>0$, 使得

$$t_{k+1}-t_k\geqslant\rho,\qquad k=1,2,\cdots;$$

(iii) 存在一个常数 $\alpha>0$, 使得

$$0<\alpha_k<\alpha,\qquad k=1,2,\cdots;$$

(iv) $\limsup\limits_{k\to+\infty}\displaystyle\int_{t_k}^{t_k+r}Q(s)e^{\int_{s-r}^{s}P(\xi)d\xi}ds>\dfrac{1}{m}(1+\alpha)^{2\beta}$,

则问题 (5.3.1), (A) 的任意非零解在区域 G 上是振动的.

证明 假设 $u(t,x)$ 为问题 (5.3.1),(A) 在区域 $[\sigma,+\infty)\times\Omega$ 上的常号非零解, 这里 σ 为某非负常数. 不妨设当 $(t,x)\in[\sigma,+\infty)\times\Omega$ 时有 $u(t,x)>0$, 则由 (5.3.3) 定义的函数 $U(t)$ 是不等式 (5.3.2) 在 $t\geqslant\sigma+\tau^*$ 上的一个正解且满足 $U(t-r)>0$, $h(U(t-r))>0$. 在 (5.3.2) 式两端同乘以 $e^{\int_T^t P(\xi)d\xi}$, $t>T\geqslant\sigma+\tau^*$, 令

$$y(t)=U(t)e^{\int_T^t P(\xi)d\xi},\qquad t>T,$$

则有

$$y'(t)+Q(t)e^{\int_T^t P(\xi)d\xi}h[y(t-r)e^{-\int_T^{t-r}P(\xi)d\xi}]\leqslant 0,\qquad t\neq t_k,\ t>T. \tag{5.3.14}$$

易知 $y(t)$ 是一个非增函数.

对 $t=t_k$,

$$\Delta y(t_k)=[U(t_k^+)-U(t_k)]e^{\int_T^t P(\xi)d\xi}\leqslant \alpha_k U(t_k)e^{\int_T^t P(\xi)d\xi}=\alpha_k y(t_k). \tag{5.3.15}$$

对 (5.3.14) 从 t_k 到 t_k+r 积分，有

$$y(t_k+r)-y(t_k^+)-\sum_{s=k}^{k+\beta-1}\alpha_s y(t_s)+\int_{t_k}^{t_k+r}Q(s)e^{\int_T^s P(\xi)d\xi}h[y(s-r)e^{-\int_T^{s-r}P(\xi)d\xi}]ds\leqslant 0.$$

由条件 (i) 可得

$$y(t_k+r)-y(t_k^+)-\sum_{s=k}^{k+\beta-1}\alpha_s y(t_s)+m\int_{t_k}^{t_k+r}Q(s)e^{\int_{s-r}^s P(\xi)d\xi}y(s-r)ds\leqslant 0. \tag{5.3.16}$$

注意到

$$y(s-r)\geqslant\frac{y(s-r)}{(1+\alpha)^\beta}, \tag{5.3.17}$$

由 (5.3.16) 和 (5.3.17) 可得

$$\begin{aligned}\frac{m}{(1+\alpha)^\beta}\int_{t_k}^{t_k+r}Q(s)e^{\int_{s-r}^s P(\xi)d\xi}y(s-r)ds&\leqslant y(t_k^+)-y(t_k+r)+\sum_{s=k}^{k+\beta-1}\alpha_s y(t_s)\\&\leqslant(1+\alpha_k)y(t_k)+\sum_{s=k+1}^{k+\beta-1}\alpha_s y(t_s),\end{aligned}$$

$$\frac{m}{(1+\alpha)^\beta}y(t_k)\int_{t_k}^{t_k+r}Q(s)e^{\int_{s-r}^s P(\xi)d\xi}ds\leqslant(1+\alpha)y(t_k)+\alpha\sum_{s=k+1}^{k+\beta-1}y(t_s). \tag{5.3.18}$$

但是

$$\begin{aligned}&y(t_{k+1})\leqslant y(t_k^+)\leqslant(1+\alpha_k)y(t_k)\leqslant(1+\alpha)y(t_k),\\&y(t_{k+2})\leqslant y(t_{k+1}^+)\leqslant(1+\alpha_{k+1})y(t_{k+1})\leqslant(1+\alpha)y(t_{k+1})\leqslant(1+\alpha)^2y(t_k),\\&\qquad\vdots\\&y(t_{k+\beta-1})\leqslant\cdots\leqslant(1+\alpha)^{\beta-1}y(t_k).\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{s=k+1}^{k+\beta-1} y(t_s) \leqslant y(t_k)\sum_{i=1}^{\beta-1}(1+\alpha)^i = y(t_k)(1+\alpha)\frac{(1+\alpha)^{\beta-1}-1}{\alpha}. \tag{5.3.19}$$

由 (5.3.18) 和 (5.3.19) 推知

$$\frac{m}{(1+\alpha)^\beta}y(t_k)\int_{t_k}^{t_k+r} Q(s)e^{\int_{s-r}^{s}P(\xi)d\xi}ds \leqslant (1+\alpha)y(t_k)+\alpha y(t_k)(1+\alpha)\frac{(1+\alpha)^{\beta-1}-1}{\alpha}$$
$$= y(t_k)(1+\alpha)^\beta,$$

即

$$\int_{t_k}^{t_k+r} Q(s)e^{\int_{s-r}^{s}P(\xi)d\xi}ds \leqslant \frac{1}{m}(1+\alpha)^{2\beta}.$$

最后一个不等式与条件 (iv) 矛盾.

若当 $(t,x)\in[\sigma,+\infty)\times\Omega$ 时有 $u(t,x)<0$, 那么易验证 $-u(t,x)$ 是问题 (5.3.1), (A) 在区间 $(t,x)\in[\sigma,+\infty)\times\Omega$ 上的正解, 由此可得矛盾. □

引理 5.3.3[17] 如果 $\mu\in C(\partial\Omega,(0,+\infty))$, 那么 Robin 特征值问题

$$\begin{cases}\Delta u+\lambda u=0, & x\in\Omega, \lambda\text{是常数}, \\ \frac{\partial u}{\partial N}+\mu(x)u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{5.3.20}$$

有最小正特征值 λ_0 且相应的特征函数 $\Phi(x)$ 在 Ω 上是正的.

类似引理 5.3.1 的方法可证如下引理.

引理 5.3.4 如果假设 (H1),(H2) 成立, $\mu\in C(\partial\Omega,(0,+\infty))$. 如果 $u(t,x)$ 是问题 (5.3.1),(A) 在区域 $[\sigma,+\infty)\times\Omega$ 上的正解, 这里 σ 为某非负常数, 那么具有时滞的脉冲微分不等式

$$\begin{cases}V'(t)+[\lambda_0a(t)+P(t)]V(t)+\lambda_0b(t)V(t-\tau) & \\ +Q(t)h[V(t-r)]\leqslant 0, & t\neq t_k, \\ V(t_k^+)\leqslant(1+\alpha_k)V(t_k), & k=1,2,\cdots\end{cases} \tag{5.3.21}$$

有最终正解

$$V(t)=\frac{1}{\int_\Omega \Phi(x)dx}\int_\Omega u(t,x)\Phi(x)dx, \tag{5.3.22}$$

其中

$$P(t)=\min_{x\in\overline{\Omega}}p(t,x), \qquad Q(t)=\min_{x\in\overline{\Omega}}q(t,x).$$

类似定理 5.3.1 的证明可得如下定理 5.3.5.

定理 5.3.5　假设条件 (H1),(H2),(H3) 成立，$\mu \in C(\partial \Omega, (0, +\infty))$. 如果具有时滞的脉冲微分不等式 (5.3.21) 无最终正解，那么问题 (5.3.1), (A) 在区域 G 上的每个非零解是振动的.

定理 5.3.6　假设 (H1),(H2),(H3) 成立，$\mu \in C(\partial \Omega, (0, +\infty))$. 再假设

(i) 存在常数 $\rho > 0$, 使得

$$t_{k+1} - t_k \geqslant \rho, \qquad k = 1, 2, \cdots$$

且 $\tau \geqslant \rho$;

(ii) $\limsup\limits_{k \to +\infty} \dfrac{1}{1+\alpha_k} \displaystyle\int_{t_k}^{t_k+\rho} b(s) e^{\int_{s-\tau}^{s} [\lambda_0 a(\xi) + P(\xi)] d\xi} ds > \dfrac{1}{\lambda_0}$,

那么，问题 (5.3.1),(A) 的每个非零解在区域 G 内是振动的.

证明　用反证法. 假设 $u(t,x)$ 是问题 (5.3.1),(A) 的一个非零解且在 $[\sigma, +\infty) \times \Omega$ 上不变号，这里 σ 为某非负常数. 不妨设当 $(t,x) \in [\sigma, +\infty) \times \Omega$ 时有 $u(t,x) > 0$, 那么当 $t \geqslant \sigma + \tau^* = \max\{\tau, \gamma\}$ 时，由 (5.3.22) 定义的函数 $V(t)$ 是不等式 (5.3.21) 的正解. 现有

$$V(t-\tau) > 0, V(t-\gamma) > 0 \text{ 且 } h(V(t-\gamma)) > 0, \qquad \tau \geqslant \sigma + \tau^*.$$

当 $t \neq t_k$ 时，由 (5.3.21) 有

$$V'(t) + [\lambda_0 a(t) + P(t)] V(t) + \lambda_0 b(t) V(t-\tau) \leqslant 0, \qquad \tau \geqslant \sigma + \tau^*. \tag{5.3.23}$$

(5.3.21) 两边乘

$$e^{\int_T^t [\lambda_0 a(\xi) + P(\xi)] d\xi}, \qquad t > T \geqslant \sigma + \tau^*$$

且设

$$y(t) = V(t) e^{\int_T^t [\lambda_0 a(\xi) + P(\xi)] d\xi}, \qquad t > T,$$

可得

$$y'(t) + \lambda_0 b(t) e^{\int_T^t [\lambda_0 a(\xi) + P(\xi)] d\xi} y(t-\tau) e^{-\int_T^{t-\tau} [\lambda_0 a(\xi) + P(\xi)] d\xi} \leqslant 0, \qquad t > T + \tau. \tag{5.3.24}$$

当 $t = t_k$ 时，有 $\Delta y(t_k) \leqslant \alpha_k y(t_k)$. 从 t_k 到 $t_k + \rho$ 上积分 (5.3.24), 通过如定理 5.3.2 的分析讨论，可得下列不等式

$$y(t_k + \rho) + y(t_k^+) \left(\frac{\lambda_0}{1 + \alpha_K} \int_{t_k}^{t_k+\rho} b(s) e^{\int_{s-\tau}^{s} [\lambda_0 a(\xi) + P(\xi)] d\xi} ds - 1 \right) \leqslant 0,$$

这与 (ii) 矛盾.

如果当 $(t,x) \in [\sigma, +\infty) \times \Omega$, 有 $u(t,x) < 0$, 那么当 $(t,x) \in [\sigma, +\infty) \times \Omega$ 时 $-u(t,x)$ 是问题 (5.3.1),(A) 的正解. 因此由类似分析可得矛盾. □

定理 5.3.7 假设 (H1),(H2),(H3) 成立, $\mu \in (\partial\Omega, (0, +\infty))$. 再假设

(i) $t_{k+1} - t_k \geqslant \rho$, $k = 1, 2, \cdots$ 且 $\tau < \rho$;

(ii) 对某常数 $\alpha > 0$ 有 $0 < \alpha_k < \alpha$, $k = 1, 2, \cdots$;

(iii) $\limsup\limits_{t \to +\infty} \int_{t-\tau}^{t} b(s) e^{\int_{s-\tau}^{s} [\lambda_0 a(\xi) + P(\xi)] d\xi} ds > \dfrac{1+\alpha}{\lambda_0 e}$,

那么问题 (5.3.1),(A) 的每个非零正解在区域 G 内是振动的.

注 5.3.1 定理 5.3.6 和定理 5.3.7 是对含时滞的拉普拉斯项的系数 $b(t)$ 加条件得到的, 而过去的方法得不到这样的条件. 故这儿更深刻揭示了时滞对脉冲时滞抛物系统振动性的影响.

附 注

引理 5.1.1 选自 [4] 并参考 [16]. 引理 5.1.2, 定理 5.1.1~ 定理 5.1.10 选自 [9]. 引理 5.1.3, 引理 5.2.2 引自 [10]. 定理 5.2.1~ 定理 5.2.8 选自 [14].§5.3 的主要结果定理 5.3.2~ 定理 5.3.4, 定理 5.3.6~ 定理 5.3.7 为作者待发表内容, 其中引理 5.3.3 引自 [17].

和本章有关的内容还可参看本章后面所引的参考文献.

参 考 文 献

1 L H Erbe, H I Freedman, Xinzhi Liu, Jianghong Wu. Compareson principles for impulsive parabolic equalitions with applications to models of single species growth. J, Austral Math. Soc., Ser B, 1991, 32: 382~400

2 D Bainov, Z Kamont, E Minchev. Periodic boundary value problem fou impulsive hyperbolic partial differential equations of first order. Appl. Math. Comput.,1994, 80(1): 1~10

3 D Bainov, E Minchev, K Nakagawa. Asymptotic behaviour of solutions of impusive semilinear paraholic equations. Nonlienear Analysis,1997, 30: 2725~2734

4 Xilin Fu, Xinzhi Liu. Oscillation criteria for impusive hyperbolic systems. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 1997, 3: 225~244

5 Xinlin Fu, Wan Zhuang. *Oscillation of certain heutral delay parabolic equations.* J. Math. Anal. Appl., 1995, 191: 473~489

6 Xilin Fu. Xinzhi Liu. Oscillation criteria for a class of nonliear neutral parabolic partial defferential equations. Appl.Anal. 1995, 58: 215~228

7 Xinzhi Liu, Xilin Fu. High order nonlinear differential inequalities with distributed deviating arguments and applications. Appl. Math. Comput. 1999, 98: 147~167

8 Xinzhi Liu, Xilin Fu. Oscillation criteria for nonliear inhomogeneous hyperbolic equations with distributed deviating arguments. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 1996, 9: 21~23

9 Xilin Fu, Xinzhi Liu, S. Sivaloganathan.Oscillation criteria for impulsive parabolic systems, Appl. Anal. 2001. 79: 239~255

10 D Bainov, V Lakshmilanthan, P S. Simeonov. Theory of Impulsive Differential Equations. World Scientific Publishers,Singapore,1989

11 Liqin Zhang. Oscillation criteria for certain inpulsive parabolic partial differential equations. Academic Periodical Abstracts of China, 1999, 5: 492～493

12 Liqin Zhang. Oscillation criteria for certain delay parabolic systems with fixed moments of impulsive effects. Chinese Sclence Abstracts, 2000, 6: 1380～1381

13 Liqin Zhang, Yufen Zhang. Forced oscillation for impulsive parabolic systems with delay. Science Technology and Enginerring, 2003, 3: 515～517

14 张立琴. 具有不依赖于状态脉冲的双曲型偏微分方程的振动准则. 数学学报, 2003, 43: 17～26

15 Xinlin Fu, Xinzhi Liu, S Sivaloganathan. Oscillation criteria for impulsive parabolic differential equations with delay. J. Math. Anal. Appl., 2002, 268: 647～664

16 D Gilbarg, N S Trudingeer. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer-Verlag,Berlin, 1977

17 Q X Ye, Z Y Li. Introduction to Reaction-Diffusion Equations. Beijing: Science Press. 1990

18 Liqin Zhang. Forced oscillation for a class of impulsive hyperbolic systems. Chinese Science Abstracts, 2001, 7: 73～75

19 Liqin Zhang, Xilin Fu. Oscillations of certain nonlinear delay parabolic boundary value problems. Korean Journal of Computational & Applied Math., 2001, 8: 137～149

20 Xilin Fu, Linqin Zhang. Forced Oscillation for impulsive hyperbolic boundary value problems with delay .Appl.Math.Comput. 2004, 158: 761～780

《现代数学基础丛书》出版书目

（按初版时间排序）

1 数理逻辑基础（上册） 1981.1 胡世华、陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙、吕以辇、陈志华 著
3 组合论（上册） 1981.10 柯召、魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭、方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧、刘秀芳 著
7 数理逻辑基础（下册） 1982.8 胡世华、陆钟万 著
8 有限群构造（上册） 1982.11 张远达 著
9 有限群构造（下册） 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔、邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论（上册） 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论（上册） 1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论（下册） 1987.12 柯召、魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著
29 同调代数 1988.2 周伯壎 著
30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著

31　带有时滞的动力系统的稳定性　1989.10　秦元勋等　编著
32　代数拓扑与示性类　1989.11　马德森著　吴英青、段海鲍译
33　非线性发展方程　1989.12　李大潜、陈韵梅　著
34　反应扩散方程引论　1990.2　叶其孝等　著
35　仿微分算子引论　1990.2　陈恕行等　编
36　公理集合论导引　1991.1　张锦文　著
37　解析数论基础　1991.2　潘承洞等　著
38　拓扑群引论　1991.3　黎景辉、冯绪宁　著
39　二阶椭圆型方程与椭圆型方程组　1991.4　陈亚浙、吴兰成　著
40　黎曼曲面　1991.4　吕以辇、张学莲　著
41　线性偏微分算子引论（下册）　1992.1　齐民友　著
42　复变函数逼近论　1992.3　沈燮昌　著
43　Banach 代数　1992.11　李炳仁　著
44　随机点过程及其应用　1992.12　邓永录等　著
45　丢番图逼近引论　1993.4　朱尧辰等　著
46　线性微分方程的非线性扰动　1994.2　徐登洲、马如云　著
47　广义哈密顿系统理论及其应用　1994.12　李继彬、赵晓华、刘正荣　著
48　线性整数规划的数学基础　1995.2　马仲蕃　著
49　单复变函数论中的几个论题　1995.8　庄圻泰　著
50　复解析动力系统　1995.10　吕以辇　著
51　组合矩阵论　1996.3　柳柏濂　著
52　Banach 空间中的非线性逼近理论　1997.5　徐士英、李冲、杨文善　著
53　有限典型群子空间轨道生成的格　1997.6　万哲先、霍元极　著
54　实分析导论　1998.2　丁传松等　著
55　对称性分岔理论基础　1998.3　唐云　著
56　Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用　1998.10　乐茂华　著
57　半群的 S-系理论　1999.2　刘仲奎　著
58　有限群导引(下册)　1999.5　徐明曜等　著
59　随机模型的密度演化方法　1999.6　史定华　著
60　非线性偏微分复方程　1999.6　闻国椿　著
61　复合算子理论　1999.8　徐宪民　著
62　离散鞅及其应用　1999.9　史及民　编著
63　调和分析及其在偏微分方程中的应用　1999.10　苗长兴　著
64　惯性流形与近似惯性流形　2000.1　戴正德、郭柏灵　著
65　数学规划导论　2000.6　徐增堃　著

66 拓扑空间中的反例 2000.6 汪林、杨富春 编著
67 拓扑空间论 2000.7 高国士 著
68 非经典数理逻辑与近似推理 2000.9 王国俊 著
69 序半群引论 2001.1 谢祥云 著
70 动力系统的定性与分支理论 2001.2 罗定军、张祥、董梅芳 编著
71 随机分析学基础（第二版） 2001.3 黄志远 著
72 非线性动力系统分析引论 2001.9 盛昭瀚、马军海 著
73 高斯过程的样本轨道性质 2001.11 林正炎、陆传荣、张立新 著
74 数组合地图论 2001.11 刘彦佩 著
75 光滑映射的奇点理论 2002.1 李养成 著
76 动力系统的周期解与分支理论 2002.4 韩茂安 著
77 神经动力学模型方法和应用 2002.4 阮炯、顾凡及、蔡志杰 编著
78 同调论——代数拓扑之一 2002.7 沈信耀 著
79 金兹堡-朗道方程 2002.8 郭柏灵等 著
80 排队论基础 2002.10 孙荣恒、李建平 著
81 算子代数上线性映射引论 2002.12 侯晋川、崔建莲 著
82 微分方法中的变分方法 2003.2 陆文端 著
83 周期小波及其应用 2003.3 彭思龙、李登峰、谌秋辉 著
84 集值分析 2003.8 李雷、吴从炘 著
85 数理逻辑引论与归结原理 2003.8 王国俊 著
86 强偏差定理与分析方法 2003.8 刘文 著
87 椭圆与抛物型方程引论 2003.9 伍卓群、尹景学、王春朋 著
88 有限典型群子空间轨道生成的格（第二版） 2003.10 万哲先、霍元极 著
89 调和分析及其在偏微分方程中的应用（第二版） 2004.3 苗长兴 著
90 稳定性和单纯性理论 2004.6 史念东 著
91 发展方程数值计算方法 2004.6 黄明游 编著
92 传染病动力学的数学建模与研究 2004.8 马知恩、周义仓、王稳地、靳 祯 著
93 模李超代数 2004.9 张永正、刘文德 著
94 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 2005.1 王玉文 著
95 巴拿赫空间结构和算子理想 2005.3 钟怀杰 著
96 脉冲微分系统引论 2005.3 傅希林、闫宝强、刘衍胜 著